

Correction du DS n°1

Exercice 1

1. (a) La négation de la proposition donnée est $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > y \text{ et } e^z \leq x$.

(b) Montrons que P est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $y = \ln(x)$. Soit $z \in \mathbb{R}$. Supposons que $z > y$. Ainsi, $z > \ln(x)$. Puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^z > x$

On a bien trouvé un réel y tel que : $\forall z \in \mathbb{R}, z > y \implies e^z > x$. Ceci démontre P .

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 : n est pair

On dispose alors de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Par conséquent,

$$n(3n + 1) = 2k(3 \times 2k + 1) = 2k(6k + 1) = 2(6k^2 + k)$$

Par opération sur les entiers, $6k^2 + k \in \mathbb{Z}$ donc $n(3n + 1)$ est pair.

Cas 2 : n est impair

On dispose alors de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Par conséquent,

$$n(3n + 1) = (2k + 1)(3 \times (2k + 1) + 1) = (2k + 1)(6k + 4) = 2(2k + 1)(3k + 2)$$

Par opération sur les entiers, $(2k + 1)(3k + 2) \in \mathbb{Z}$ donc $n(3n + 1)$ est pair.

Dans tous les cas, $n(3n + 1)$ est pair. On a montré :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, n(3n + 1) \text{ est pair.}$$

3. La fonction $f = \ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Comme le carré d'un réel est positif, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) \leq 0$.

Par conséquent, la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et alors, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(X) \leq f'(1)(X - 1) + f(1)$$

c'est-à-dire

$$\ln(X) \leq X - 1$$

car $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $f(1) = \ln(1) = 0$. Pour tout $x > -1$, on a $1 + x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc

$$\ln(1 + x) \leq 1 + x - 1$$

d'où

$$\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$$

Variante : étude de fonction classique.

4. Soit f une fonction à valeur réelle. Notons $\mathcal{D}$ son domaine de définition. On dit que f est paire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, et si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x)$$

5. Supposons que f est croissante et négative sur $\mathbb{R}$ et que g est décroissante et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $x \leq y$. Par croissance et négativité de f sur $\mathbb{R}$, on a

$$f(x) \leq f(y) \leq 0$$

c'est-à-dire

$$-f(x) \geq -f(y) \geq 0$$

Par décroissance et positivité de g , on a

$$g(x) \geq g(y) \geq 0$$

Par produit d'inégalités positives,

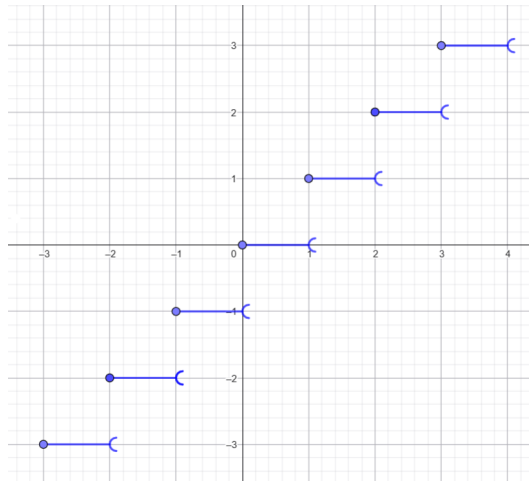
$$-f(x)g(x) \geq -f(y)g(y)$$

D'où

$$f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$$

Ce qui montre que la fonction $f \times g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x , et on note $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$ (on admet que cet entier existe et est unique).



7. Cette inéquation est clairement définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc

$$-\frac{3}{2} \leq \lfloor x \rfloor < \pi \iff -1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 3 \iff -1 \leq x < 4$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[-1, 4[$.

8. On sait que $0 \leq 4 < 10$. Par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $2 < \sqrt{10}$. Donc $\sqrt{10} - 2 \in \mathbb{R}_+$. Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{10} - 2 < \sqrt{3} &\iff (\sqrt{10} - 2)^2 < \sqrt{3}^3 \\ &\iff 10 - 4\sqrt{10} + 4 < 3 \\ &\iff 11 < 4\sqrt{10} \\ &\iff 11^2 < (4\sqrt{10})^2 \quad (\text{encore par croissance stricte de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff 121 < 160 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, donc par équivalence : $\sqrt{10} - 2 < \sqrt{3}$.

9. Raisonnons par contraposée.

Supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k < \frac{1}{n}$. Alors, en sommant ces inégalités, on trouve :

$$a_1 + \dots + a_n < 1$$

On a donc montré :

$$a_1 + \dots + a_n \geq 1 \implies \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k \geq \frac{1}{n}$$

- 10.

```
P=1
for k in range(1,2027):
    P=P*(1+k+k**2)
print(P)
```

11. L'équation $x^4 + 2 = 0$ est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x^4 + 2 = 0 \iff x^4 = -2$.
Or, $x^4 = (x^2)^2$ est positif car c'est un carré. Donc $x^4 \neq -2$. Autrement dit,

L'équation $x^4 + 2 = 0$ d'inconnue réelle x n'a pas de solution.

12. Notons (I) l'inéquation donnée par $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0$. Déterminons le domaine de définition de (I) .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \text{ est bien défini } \begin{array}{l} \text{si, et seulement si, } \frac{1+x^2}{1-x^2} \text{ est bien défini et } \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \\ \text{si, et seulement si, } 1-x^2 \neq 0 \text{ et } \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \end{array}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1-x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $1+x^2 \geq 1 > 0$ (car le carré d'un réel est positif) donc le signe de $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ est celui de $1-x^2 = (1-x)(1+x)$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	-	
$1+x$	-	+	+	
$1-x^2$	-	+	-	

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \iff x \in]-1, 1[.$$

En conclusion, l'inéquation (I) est définie sur $D =]-1, 1[$.

Résolvons (I) . Soit $x \in D$.

Par croissance stricte de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0 \iff \frac{1+x^2}{1-x^2} < e^0 = 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (I) &\iff \frac{1+x^2}{1-x^2} < 1 \\ &\iff \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{1+x^2 - (1-x^2)}{1-x^2} < 0 \\ &\iff \frac{2x^2}{1-x^2} < 0 \end{aligned}$$

Or, $2x^2 \geq 0$ (car tout carré est positif) et $1-x^2 > 0$ (car $x \in]-1, 1[$). Ainsi, la dernière assertion est fausse. Par équivalence, x n'est pas solution de (I) .

En conclusion, (I) n'admet aucune solution.

13. L'équation $(E) : e^{2x} - e^x - 1 = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$, car l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit x un réel. Alors, $e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$.
Ainsi,

x est solution de (E) si, et seulement si, e^x est racine du polynôme $X^2 - X - 1$

Or, $X^2 - X - 1$ est un polynôme du second degré, de discriminant $5 > 0$ donc admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi,

x est solution de (E) si, et seulement si, $e^x = x_1$ ou $e^x = x_2$

Or, $x_1 < 0$ (car $\sqrt{5} > 1$) et $x_2 > 0$. Donc $e^x \neq x_1$ (l'exponentielle est à valeurs positives), donc

x est solution de (E) si, et seulement si, $e^x = x_2$ si, et seulement si, $x = \ln(x_2)$

L'unique solution de (E) est $\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

14. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t+1}-t+1} \text{ est bien défini} & \quad \text{si, et seulement si,} \quad \sqrt{t+1} \text{ est bien défini et } \sqrt{t+1}-t+1 \neq 0 \\ & \quad \text{si, et seulement si,} \quad t+1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{t+1}-t+1 \neq 0 \\ & \quad \text{si, et seulement si,} \quad t \geq -1 \text{ et } \sqrt{t+1}-t+1 \neq 0 \end{aligned}$$

Soit $t \geq -1$. On a :

$$\sqrt{t+1}-t+1 = 0 \iff \sqrt{t+1} = t-1.$$

Cas 1 : $t < 1$

Alors $t-1 < 0$. Or, $\sqrt{t+1} \geq 0$ par positivité de la racine carrée. Donc, par transitivité $\sqrt{t+1} \neq t-1$. Ainsi, dans ce cas, f est bien définie en t .

Cas 2 : $t \geq 1$

Alors $t-1 \geq 0$ et $\sqrt{t+1} \geq 0$. Par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{t+1} = t-1 \iff t+1 = (t-1)^2 \iff t+1 = t^2-2t+1 \iff t^2-3t = 0 \iff t(t-3) = 0 \iff t = 3$$

(car $t \geq 1$ donc $t \neq 0$).

Ainsi, dans ce cas, f est définie en t si, et seulement si, $t \neq 3$.

Finalement, f est définie sur $[-1, 3[\cup]3, +\infty[$.

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x + 2| < 3 & \iff -3 < x^2 - 2x + 2 < 3 \\ & \iff x^2 - 2x + 5 > 0 \text{ et } x^2 - 2x - 1 < 0 \end{aligned}$$

Considérons les polynômes donnée par $P(X) = X^2 - 2X + 5$ et $Q(X) = X^2 - 2X - 1$. P est un polynôme du second degré, de discriminant $-16 < 0$ donc ne s'annule pas et est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son coefficient dominant étant positif, P est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $P(x) > 0$.

Q est un polynôme du second degré, de discriminant $8 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Le coefficient dominant de Q étant positif, Q est négatif entre ses racines, donc :

$$Q(x) < 0 \iff x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[.$$

Finalement, pour tout réel x :

$$|x^2 - 2x + 2| < 3 \iff P(x) > 0 \text{ et } Q(x) < 0 \iff x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[.$$

L'ensemble des solutions de $|x^2 - 2x + 2| < 3$ est $]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$.

16. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression $\ln(t)$ est bien définie si et seulement si $t > 0$.

Dans ce cas, la puissance généralisée $(1+t)^{\ln(t)}$ est bien définie si et seulement si $1+t > 0$, ce qui est vrai (car $t > 0$).

Ainsi, f admet pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = \exp(\ln(1+t) \ln(t)).$$

Alors, $g : t \mapsto \ln(1+t) \ln(t)$ étant dérivable sur son domaine de définition, comme produit de fonctions qui le sont, la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme composée des fonctions g et $\exp : t \mapsto e^t$, dérivables sur leur domaine de définition.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \frac{\ln(t)}{1+t} + \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t \ln(t) + (1+t) \ln(1+t)}{t(1+t)} = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t(1+t)}$$

et on a donc :

$$f'(t) = (\exp \circ g)'(t) = g'(t) \times \exp(g(t)) = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t(1+t)} (1+t)^{\ln(t)}$$

Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t} (1+t)^{\ln(t)-1}$

Exercice 2

A : On a $a = 1 \times a$ donc $a|a$. Ce qui montre la proposition A.

B : Supposons que $a|b$ et que $b|c$. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$b = ka \quad \text{et} \quad c = \ell b$$

Alors

$$c = \ell b = \ell ka$$

Par opération sur les entiers, $\ell k \in \mathbb{Z}$ donc $a|c$. Ce qui montre la proposition B.

C : Supposons que $a|b$ et que $a|c$. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$b = ka \quad \text{et} \quad c = \ell a$$

Alors, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$nb + mc = nka + m\ell a = (nk + m\ell)a$$

Par opération sur les entiers, $nk + m\ell \in \mathbb{Z}$ donc $a|(nb + mc)$. Ce qui montre la proposition C.

D : Supposons que $a|b$ et que $c|d$. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$b = ka \quad \text{et} \quad d = \ell c$$

Alors

$$bd = ka \times \ell c = k\ell ac$$

Par opération sur les entiers, $k\ell \in \mathbb{Z}$ donc $ac|bd$. Ce qui montre la proposition D.

Exercice 3

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13 \\ F_8 &= F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21 \end{aligned}$$

(b) Montrons par récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n) : "F_n \in \mathbb{N}"$$

- Initialisation : On a $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donc $F_0 \in \mathbb{N}$ et $F_1 \in \mathbb{N}$. Ceci montre $H(0)$ et $H(1)$, d'où l'initialisation.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies et montrons $H(n+2)$.

Par définition de F , on a

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Or, d'après $H(n)$ et $H(n+1)$,

$$F_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad F_{n+1} \in \mathbb{N}$$

Par somme, $F_{n+1} + F_n \in \mathbb{N}$ donc $F_{n+2} \in \mathbb{N}$. Ce qui montre $H(n+2)$ et achève l'hérédité.

- Conclusion : On a montré par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \in \mathbb{N}}$

(c) Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n) : "F_n > 0"$$

- Initialisation : On a $F_1 = 1$ donc $F_1 > 0$. Ceci montre $P(1)$, d'où l'initialisation.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons $P(n+1)$.

Par définition de F , on a

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

D'après la question précédente, $F_{n-1} \in \mathbb{N}$ donc $F_{n-1} \geq 0$ et alors

$$F_{n+1} \geq F_n$$

Or, d'après $P(n)$, $F_n > 0$ donc par transitivité $F_{n+1} > 0$.

Ce qui montre $P(n+1)$ et achève l'hérédité.

- Conclusion : On a montré par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n > 0}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Par définition de la suite F , on a

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Or $n \geq 2$ donc $n-1 \geq 1$. Ainsi, d'après la question précédente, $F_{n-1} > 0$. Par conséquent,

$$F_{n+1} > F_n$$

On a montré que $\boxed{\text{la suite } (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante à partir du rang } 2.}$

2. On a

$$\begin{aligned} F_2 F_0 - F_1^2 &= 1 \times 0 - 1^2 = -1 \\ F_3 F_1 - F_2^2 &= 2 \times 1 - 1^2 = 1 \\ F_4 F_2 - F_3^2 &= 3 \times 1 - 2^2 = -1 \\ F_5 F_3 - F_4^2 &= 5 \times 2 - 3^2 = 1 \end{aligned}$$

On peut émettre la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Démontrons-la. Pour cela, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.
Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison -1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de F , on a

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{et} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - (F_n + F_{n-1})^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_n^2 - 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n - 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= (F_n + F_{n-1})F_n - 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 + F_{n-1}F_n - 2F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_n - F_{n-1}^2 \\ &= F_n^2 - (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\ u_{n+1} &= -u_n \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison -1 . Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \times (-1)^{n-1}$$

Or, $u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1$. Il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = -1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^n$$

On a montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n}$$

Variante : récurrence simple

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de F , on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad F_k = F_{k+2} - F_{k-1}$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n F_k = \sum_{k=0}^n F_{k+2} - F_{k+1}$$

Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - F_1 = F_{n+2} - 1$$

On a montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1}$$

Variante : récurrence simple (et pas forte)

Exercice 4

1. Par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$a^b < b^a \iff \ln(a^b) < \ln(b^a) \iff b \ln(a) < a \ln(b)$$

2. On a

$$a \ln(b) - b \ln(a) = ab \frac{\ln(b)}{b} - ab \frac{\ln(a)}{a} = ab \left(\frac{\ln(b)}{b} - \frac{\ln(a)}{a} \right)$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln(x)}{x} \text{ est bien défini si, et seulement si, } x > 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\text{si, et seulement si, } x > 0$$

Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Un carré étant toujours positif, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 \geq 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

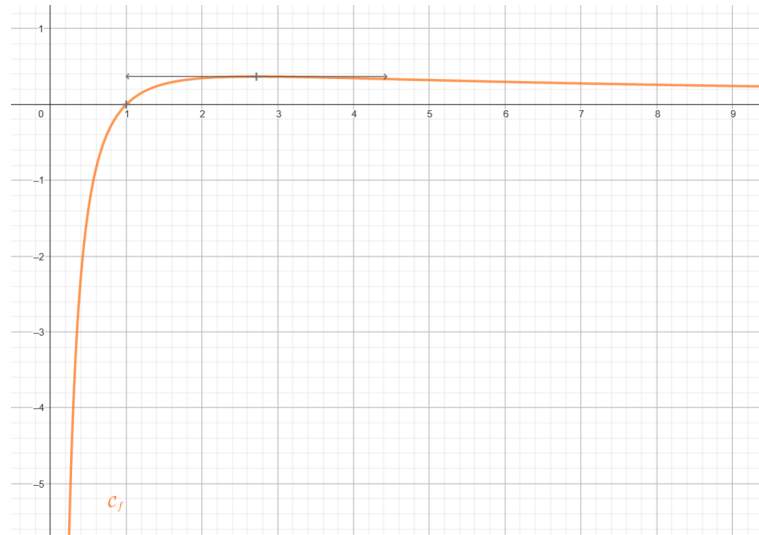
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff e > x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1 - \ln(x) = 0 \iff 1 = \ln(x) \iff e = x$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	e^{-1}	0

On en déduit la représentation graphique suivante :



4. D'après les questions 1 et 2, on a

$$a^b < b^a \iff b \ln(a) < a \ln(b) \iff a \ln(b) - b \ln(a) > 0 \iff ab \left(\frac{\ln(b)}{b} - \frac{\ln(a)}{a} \right) > 0$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$, on en déduit

$$a^b < b^a \iff \frac{\ln(b)}{b} - \frac{\ln(a)}{a} > 0 \iff f(b) > f(a)$$

et de façon similaire

$$a^b = b^a \iff f(b) = f(a)$$

Par conséquent,

si $0 < a \leq b \leq e$, par croissance de f sur $]0, e]$, $f(a) \leq f(b)$. Par équivalence, on a $a^b \leq b^a$.

si $e \leq a \leq b$, par décroissance de f sur $[e, +\infty[$, $f(a) \geq f(b)$. Par équivalence, on a $a^b \geq b^a$.

5. On a l'inégalité $e \leq e \leq \pi$ donc d'après la question précédente $\boxed{e^\pi \geq \pi^e}$

Exercice 5

1. (a) En utilisant la relation précédente avec $x = 0$ et $y = 0$ (possible car $0 \in \mathbb{Q}$), on obtient

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

donc

$$f(0) = 2f(0)$$

d'où

$$\boxed{f(0) = 0}$$

(b) Fixons $x \in \mathbb{Q}$. Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n) : "f(nx) = nf(x)"$$

• Initialisation : On a $f(0 \times x) = f(0) = 0$ et $0 \times f(x) = 0$ donc $f(0 \times x) = 0 \times f(x)$. Ceci montre $H(0)$, d'où l'initialisation.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie et montrons $H(n+1)$.

D'après l'hypothèse vérifiée par f , on a

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x)$$

Or, d'après $H(n)$,

$$f(nx) = nf(x)$$

donc

$$f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.

• Conclusion : On a montré par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)}$

(c) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 : $m \in \mathbb{N}$.

En utilisant la question précédente avec $x = 1$, on a

$$f(m) = mf(1)$$

Cas 2 : $m \in \mathbb{Z}_-^*$.

Alors $-m \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation vérifiée par f , on obtient

$$f(m + (-m)) = f(m) + f(-m)$$

c'est-à-dire,

$$f(0) = f(m) + f(-m)$$

et grâce à la question 1.a,

$$0 = f(x) + f(-x)$$

d'où

$$f(m) = -f(-m)$$

Or, $-m \in \mathbb{N}$ donc en utilisant le cas précédent,

$$f(m) = -(-mf(1)) = mf(1)$$

En résumé, on a démontré que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f(m) = mf(1)}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{Q}$. On dispose donc de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. Ainsi, $qx = p \in \mathbb{Z}$.

D'une part, d'après la question 1.b ($q \in \mathbb{N}$),

$$f(qx) = qf(x)$$

D'autre part, avec la question précédente,

$$f(qx) = f(p) = pf(1) = ap$$

Par conséquent,

$$qf(x) = ap$$

Il vient :

$$f(x) = a \frac{p}{q} = ax$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons f_a la fonction définies sur $\mathbb{Q}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f_a(x) = ax$$

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$,

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les fonctions linéaires sur } \mathbb{Q} \text{ sont solutions du problème.}}$$

3. On a montré par analyse-synthèse que les fonctions, définies sur $\mathbb{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont exactement les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6

1. Par l'absurde, si f s'annulait en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on aurait $f(x_0)f(\frac{1}{x_0}) = 1$ donc $0 = 1$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+^*}$.

De plus, $f(1)f(\frac{1}{1}) = 1$ donne $f(1)^2 = 1$, ce qui démontre $\boxed{f(1) \in \{-1, 1\}}$.

2. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après 1.), donc grâce à l'égalité vérifiée par f , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})} \quad (\star)$$

• Montrons que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est de signe constant sur $[1, +\infty[$. En particulier, f est du signe de $f(1)$ sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \in]0, 1]$. En utilisant la relation $(\star)$ et par quotient, $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$ sont de même signe.

Comme $x \in]0, 1]$, on a $\frac{1}{x} \in [1, +\infty[$. Ainsi, $f(\frac{1}{x})$ est du signe de $f(1)$, puis $f(x)$ est aussi du signe de $f(1)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in]0, 1]$, f est du signe de $f(1)$ sur $]0, 1]$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est du signe de } f(1) \text{ sur }]0, 1] \text{ et sur } [1, +\infty[, \text{ donc sur } \mathbb{R}_+^*}$.

• Montrons maintenant que f strictement croissante sur $]0, 1]$.

Soient x, y deux éléments de $]0, 1]$ tels que $x < y$.

Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

De plus, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ sont éléments de $[1, +\infty[$ car $(x, y) \in]0, 1]^2$.

Par croissance stricte de f sur $[1, +\infty[$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Enfin, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f\left(\frac{1}{y}\right)$ sont du signe de $f(1)$ (et non nuls), donc tous les deux éléments du même intervalle $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Par décroissance stricte de la fonction inverse sur chacun de ces intervalles :

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$$

d'où, vu la relation vérifiée par f :

$$f(x) < f(y).$$

Ceci démontre bien que f est strictement croissante sur $]0, 1]$.

3. Montrons que $\frac{1}{A}$ majore f en utilisant la relation $(\star)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ et comme f est minorée par A ,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq A.$$

D'une part, la fonction f est de signe constant et $f(1) = -1$ donc f est négative sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après la question 1.a, la fonction f ne s'annule pas. On obtient que $f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}_-^*$.

D'autre part, A est un minorant de f donc $A \leq f(1) = -1$ et alors $A \in \mathbb{R}_-^*$.

Par décroissance (stricte) de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, la relation précédente donne :

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \leq \frac{1}{A}$$

d'où :

$$f(x) \leq \frac{1}{A}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{A}$ est bien un majorant de f .

4. Montrons qu'il n'existe pas de telle fonction. Par l'absurde, si une telle fonction h existait, on aurait :

$$h(1)h\left(\frac{1}{1}\right) = -1$$

soit $h(1)^2 = -1$, ce qui est absurde car le carré de tout réel est positif. Ainsi, il n'existe pas de telle fonction h .

Exercice 7

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \text{ est bien défini si, et seulement si, } 1 + \frac{1}{x} \text{ est bien défini et } 1 + \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{si, et seulement si, } x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} > 0$$

Or, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$

2. La fonction f est dérivable sur son domaine en tant que composée de fonctions qui le sont.
De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \exp \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] f(x)$$

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est aussi strictement positive sur son domaine de définition. En particulier, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Ainsi, $\boxed{u \text{ est bien définie}}$.
Avec la question précédente, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, u(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}}$$

4. La fonction u est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions qui le sont.
De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1 - x + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Un carré étant toujours positif, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $u'(x)$ est du signe de $-x$.
Ainsi, avec les limites admises,

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$u'(x)$	+		-	
u	$0 \nearrow$		$\searrow 0$	

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est positive sur } \mathcal{D}_f.}$

5. La fonction f est strictement positive sur $\mathcal{D}_f$ donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$ est du même signe que $u(x)$.
On obtient, en utilisant la question précédente et les limites admises :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
f	$e \nearrow +\infty$		$1 \nearrow e$	

