

Programme de colle n° 6 : Fonctions polynômiales.

Semaine du lundi 6 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Cette semaine, tout élève devra effectuer une division euclidienne de polynômes (voir cela comme une rapide question de cours n°0).

Généralités sur les polynômes

6.1 Notion de fonction polynômiale (ou polynôme). Notation $\mathbb{R}[X]$. Polynôme nul, monôme. Remarque : par définition, deux polynômes sont égaux ssi ils sont égaux en tant que fonctions.

6.2 Identification des coefficients : un polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est nul ssi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$. Théorème d'identification des coefficients. Unicité des coefficients d'un polynôme.

6.3 Généralités : Degré, coefficients, termes, terme de plus haut degré, coefficient dominant, coefficient constant d'un polynôme. Polynôme unitaire. Notation $\mathbb{R}_n[X]$. Racine d'un polynôme. Polynôme dérivé.

Fonction affine, polynôme du second degré.

6.4 Rappels sur les fonctions affines, pente d'une droite non verticale.

6.5 Polynômes du second degré (ou de degré 2). Forme développée, forme canonique. Discriminant et existence de racines. Forme factorisée d'un polynôme du second degré. Racines d'un polynôme du second degré de discriminant positif ou nul. Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2, utilisation dans le cas d'une racine "évidente". Variations, signe et graphe.

Arithmétique des polynômes

6.6 Opérations entre polynômes (sommées, produit, multiplication par un scalaire). Terme de plus haut degré d'un produit de polynômes. Règle du produit nul pour les polynômes. Degré d'une somme, d'un produit de polynômes. Degré du polynôme dérivé.

6.7 Théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Relation de divisibilité. Lien avec le reste de la division euclidienne.

6.8 $r \in \mathbb{R}$ est racine d'un polynôme P ssi $(X - r)$ divise P . Si a_1, \dots, a_n sont des réels deux à deux distincts, alors a_1, \dots, a_n sont racines de P ssi $(X - a_1) \dots (X - a_n)$ divise P . Forme factorisée d'un polynôme de degré n ayant n racines distinctes (prop. 50). Un polynôme de degré au plus n ayant $n + 1$ racines distinctes est nul. Deux polynômes de degré au plus n étant égaux en $n + 1$ points distincts sont égaux.

Python

6.9 Fonctions, boucles while, listes (surtout les commandes len, append).

Quelques questions de cours

1. Existe-t-il des réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, (a + b)x^2 + (a - b)x + 2a = x + 1$? Les colleurs garderont une contrainte de la même difficulté mais légèrement différente.
2. Énoncer et démontrer la proposition donnant la forme canonique d'un polynôme du second degré. On explicitera cette forme canonique.
3. Énoncer et démontrer la proposition et définition donnant la forme factorisée d'un polynôme du second degré.
4. Énoncer et démontrer les relations coefficients-racines. Factoriser rapidement le polynôme $2X^2 + X - 1$ (au choix du colleur).

La démonstration du premier résultat a été faite à l'aide des limites.

Les démonstrations, à partir d'ici, seront faites à la rentrée.

5. Énoncer et démontrer la règle du produit nul pour les polynômes.
6. Montrer que si A et B sont deux polynômes tels que $B \neq 0$, alors $B|A$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.
7. Montrer que le réel r est racine du polynôme P ssi $(X - r)$ divise P .
8. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée un flottant x et renvoyant sa partie entière (sans utiliser les fonctions `np.floor` ou `int`).