Devoir surveillé n°2

Devoir du **samedi 14 novembre 2026**.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit.
Consignes de présentation : Écrire avec une encre bleue sombre ou noire. Encadrer les résultats. Ne pas utiliser la couleur rouge. Écrire de façon lisible. Éviter les ratures. **Utiliser une règle**.
Consignes de rédaction : Rédiger les raisonnements en français, dans une langue correcte et soignée, sans utiliser d'abréviation.
On rappelle que le connecteur $\implies$ ne peut pas être utilisé comme synonyme de "donc".

Exercice 1 *Quelques questions indépendantes, proches du cours*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$. Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer :
$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = n + u_n) \iff (\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad u_n = n - 2 + u_{n-2})$$

3. Soit n_0 un entier, et $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Après avoir rappelé ce que signifie "u est croissante", montrer par récurrence que si u est croissante alors :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0}.$$

4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 5$, $u_1 = 7$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10u_{n+2} = 13u_{n+1} - 3u_n.$$
Que dire de la suite u ? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

5. Soient P et Q deux polynômes. Énoncer sans démonstration la proposition donnant le degré de $P+Q$ en fonction des degrés de P et Q.

6. Soit P un polynôme réel et r un réel. Montrer que r est racine de P si et seulement si $X - r$ divise P.

7. Résoudre le système (S) d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donnée par :
$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 + z \\ x - y - 1 = z \\ 2x + 2z = y - 2 \end{cases}.$$

8. On considère une liste `L` en Python.
   (a) Donner la commande renvoyant le nombre d'éléments de `L`.
   (b) Donner la commande permettant d'ajouter un objet `a` à la liste `L`.
   (c) Que renvoie `L[-1]` ? (On n'oubliera pas que `L` pourrait être vide).

9. Définir en Python une liste `L` formée par les carrés des entiers de $[\![1, 10^7]\!]$ en une ligne de code.

10. On pose $P(X) = X^4 - \dfrac{9}{4}X^3 + \dfrac{13}{8}X^2 - \dfrac{3}{8}X \in \mathbb{R}[X]$.
    (a) Déterminer deux racines de P.
    (b) Factoriser P au maximum.
    (c) Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$ d'inconnue réelle x.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4 \times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$.

Exercice 2 *Une suite définie par un produit*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

1. Donner u_0, u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leq 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$.

   On pourra utiliser l'inégalité de concavité du logarithme : $\forall x \geq -1, \ln(1+x) \leq x$.
6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
7. Écrire une fonction Python prenant en entrée un entier naturel `n` et renvoyant $u_{\texttt{n}}$.

Exercice 3 *Autour des listes en Python*

1. Que renvoie la fonction `Mystere` suivante, prenant en entrée une liste de nombres `L` ?

```
def Mystere(L) :
    for i in range(len(L)-1) :
        if L[i] < L[i+1]:
            return(False)
    return(True)
```

2. Écrire une fonction Python d'entête `def SommeCarres(L) :` prenant en entrée une liste de nombres `L` et renvoyant en sortie la somme des carrés des entrées de `L`.
   Par exemple, `Somme([2,3,4])` doit renvoyer 29.
3. On dit ici qu'une liste est *symétrique* si sa lecture dans l'ordre inverse donne la même liste. Par exemple, `[2,"a",1,"a",2]` est symétrique, mais pas `[2,3,1,2,3]`.

   Écrire une fonction `estSymetrique` prenant en entrée une liste `L` et renvoyant `True` si celle-ci est symétrique, et `False` sinon.
4. On appelle ici *symétrisée d'une liste* `L` la liste formée consécutivement de la liste `L` puis de la liste `L` lue dans l'ordre inverse. Par exemple, la symétrisée de `[2,3,1]` est la liste symétrique `[2,3,1,1,3,2]`.

   Écrire une fonction `Symetrisee` prenant en entrée une liste `L` et renvoyant en sortie la symétrisée de `L`. Cette fonction ne devra pas modifier son argument `L`.

Exercice 4 *Une décomposition des polynômes de degré au plus* 2

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\exists!(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$

On fixe donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et on cherche à démontrer la proposition ci-dessus.

On va démontrer ce résultat de deux manières différentes. Les réponses à la seconde partie ne devront donc pas utiliser les résultats de la première.

Méthode 1 : Par une résolution directe.

Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on dispose d'uniques réels a, b, c tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$.

1. Montrer
$$\exists!(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2)$$
et exprimer l'unique triplet (λ, μ, γ) solution de ce problème en fonction de a, b et c.

Méthode 2 : Par analyse-synthèse.

2. **Analyse :** Dans cette question, on suppose l'existence de réels λ, μ, γ tels que :
$$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$
Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}P(2)$, $\mu = -P(1)$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}P(0)$. Qu'en déduire par rapport à l'énoncé recherché ?

3. **Synthèse :** On pose $\lambda = \frac{1}{2}P(2)$, $\mu = -P(1)$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}P(0)$, puis :
$$Q(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$
   (a) Montrer : $\forall i \in \{0, 1, 2\}, P(i) = Q(i)$.
   (b) En déduire que $P = Q$.
   (c) Conclure la démonstration du résultat recherché.

Exercice 5 *Une suite dite homographique.*

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}.$$

1. Écrire une fonction Python prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie la valeur de $u_{\texttt{n}}$.
2. Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $0 \leq u_n < 1$.
3. En déduire le sens de variation de la suite u.

Dans la suite, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout entier n.

4. Montrer que v_n est bien défini pour tout entier n, et que $v_n \neq 0$.
5. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
6. En déduire une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\dfrac{x-1}{x+1} = y$ d'inconnue réelle x.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 *Bonus : ne sera corrigé que si l'entièreté du sujet a été correctement traité.*

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = m$ d'inconnue réelle x.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

   Aide de calcul : développer $(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

— Fin de l'énoncé —