Corrigé du DS n°2

Exercice 1

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-x}e^{2x}}{(e^{-2x}+1)e^{2x}} = \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} = f(x)$$

donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire sur } \mathbb{R}}$

2. Montrons cette équivalence par double implication.

• Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = n + u_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Alors $n-2 \in \mathbb{N}$ et $u_{(n-2)+2} = (n-2) + u_{n-2}$ c'est-à-dire $u_n = n - 2 + u_{n-2}$.
On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \quad u_n = n - 2 + u_{n-2}$

• Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, u_n = n - 2 + u_{n-2}$.
Soit $n \in N$. Alors $n+2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ donc $u_{n+2} = (n+2) - 2 + u_{(n+2)-2}$ c'est-à-dire $u_{n+2} = n + u_n$
On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = n + u_n$

$\boxed{\text{On a démontré l'équivalence convoitée.}}$

3. u est dite croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \quad u_{n+1} \geq u_n$.
Supposons u croissante, montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$,

$$H(n) : \text{« } u_n \geq u_{n_0} \text{ »}$$

• Initialisation : $u_{n_0} \geq u_{n_0}$ est vrai, ce qui démontre $H(n_0)$.

• Hérédité : Soit $n \geq n_0$. Supposons $H(n)$. Montrons $H(n+1)$.

Par $H(n)$: $u_n \geq u_{n_0}$.
Par croissance de u : $u_{n+1} \geq u_n$.
Donc par transitivité : $u_{n+1} \geq u_{n_0}$. Ceci démontre $H(n+1)$, d'où l'hérédité.

• Conclusion : On a montré

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0}}$$

4. En divisant par 10 (qui est non nul), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{13}{10}u_{n+1} - \frac{3}{10}u_n.$$

Ainsi, $\boxed{u \text{ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants.}}$

L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est :

$$x^2 - \frac{13}{10}x + \frac{3}{10} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Le réel 1 est clairement solution de cette équation polynomiale du second degré, donc d'après les relations coefficients-racines, son autre solution x_2 vérifie $1 \times x_2 = \frac{3}{10}$.
Cette équation admet donc deux solutions distinctes 1 et $\frac{3}{10}$.

Par conséquent, on dispose de deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda 1^n + \mu\left(\frac{3}{10}\right)^n = \lambda + \mu\left(\frac{3}{10}\right)^n.$$

Alors, $u_0 = 5$ et $u_1 = 7$ montrent que λ et μ sont solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ \lambda + \frac{3}{10}\mu = 7 \end{cases}$$

Enfin,

$$(S) \underset{(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ -\dfrac{7}{10}\mu = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 5 - \mu = \dfrac{55}{7} \\ \mu = -\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{55}{7} - \frac{20}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

5. Soient P et Q deux polynômes. Alors :

   (a) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

   (b) Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

   avec les conventions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \max(n, -\infty) = n$$

$$\max(-\infty, -\infty) = -\infty$$

6. Démontrons cette équivalence par double implication.

   •. Supposons que $X - r$ divise P. Alors on dispose de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-r)Q(X)$. Ainsi, en évaluant en r, on obtient

$$P(r) = (r-r)Q(r) = 0 \times Q(r) = 0$$

   Par conséquent, r est racine de P.

   • Réciproquement, supposons que r est racine de P. Effectuons la division euclidienne de P par $X - r$. On dispose de $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que

$$P(X) = (X-r)Q(X) + R(X) \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(X-r) = 1$$

   Par conséquent, $\deg(R) \leq 0$. Le polynôme R est donc constant (éventuellement nul).
   On dispose alors de $c \in \mathbb{R}$ tel que $R(X) = c$. Ainsi, on obtient

$$P(X) = (X-r)Q(X) + c$$

   En évaluant en r, et comme r est racine de P, il vient

$$0 = P(r) = (r-r)Q(r) + c = c$$

   D'où $c = 0$ puis

$$P(X) = (X-r)Q(X)$$

   Ce qui signifie que $(X - r)$ divise P.

   On a ainsi démontré l'équivalence souhaitée.

7.
$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$$
$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 5y = 0 \\ y + 4z = -4 \end{cases}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2}{\iff} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 5y = 0 \\ 4z = -4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, il est donc de Cramer et admet alors une unique solution. Terminons la résolution de (S).

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est donc $(0, 0, -1)$.

8. (a) Le nombre d'élements de `L` est donné par `len(L)`

(b) La commande permettant d'ajouter un objet `a` à la liste `L` est `L.append(a)`

(c) Si la liste `L` est non vide, la commande `L[-1]` renvoie le dernier élément de la liste `L`.
Sinon, un message d'erreur s'affiche : `list index out of range`.

9. `L=[k**2 for k in range(1,10**7+1)]`

10. (a) $P(0) = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$ et $P(1) = \frac{8}{8} - \frac{18}{8} + \frac{13}{8} - \frac{3}{8} = 0$ donc
0 et 1 sont deux racines de P.

(b) Effectuons la division euclidienne de P par $X(X-1) = X^2 - X$. (la poser sur copie). Il vient :

$$P(X) = (X^2 - X)(X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{3}{8}).$$

Posons $Q(X) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{3}{8}$. Q est un polynôme du second degré, de discriminant

$$\Delta = \frac{25}{16} - \frac{12}{8} = \frac{1}{16} > 0.$$

Les racines de Q sont donc :

$$x_1 = \frac{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}}}{2} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}}}{2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Par conséquent : $Q(X) = (X - \frac{1}{2})(X - \frac{3}{4})$. Ainsi :

La factorisation maximale de P est $P(X) = X(X-1)(X - \frac{1}{2})(X - \frac{3}{4})$.

(*c*) Dressons le tableau de signe de P.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\frac{3}{4}$		$-$		$-$		$+$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Il vient :

$$\boxed{\text{L'ensemble des réels } x \text{ tels que } P(x)>0 \text{ est }]-\infty,0[\cup]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\cup]1,+\infty[}$$

11. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4\times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}$. Alors :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3\times 5}\frac{3^k}{5^{2k}}$$

donc par linéarité :

$$S_n=\frac{4}{15}\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{5^{2k}}=\frac{4}{15}\sum_{k=0}^{n}(\frac{3}{5^2})^k.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}\neq 1$ donc :

$$S_n=\frac{4}{15}\times\frac{1-(\frac{3}{25})^{n+1}}{1-\frac{3}{25}}=\frac{4}{15}\times\frac{25}{22}\times\left(1-(\frac{3}{25})^{n+1}\right)=\frac{2\times 2\times 5\times 5}{3\times 5\times 2\times 11}\left(1-(\frac{3}{25})^{n+1}\right)=\frac{10}{33}\left(1-(\frac{3}{25})^{n+1}\right).$$

Finalement, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{4\times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}=\frac{10}{33}\left(1-(\frac{3}{25})^{n+1}\right).}$

12. Posons $S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$. Alors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 2^{i+j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 2^i \times 2^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{i=1}^{j} 2^i && (1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \times 2^1 \frac{2^j-1}{2-1} && (2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2\times 4^j - 2\times 2^j \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} 4^j - 2\sum_{j=1}^{n} 2^j && (1) \\
&= 2\times 4\frac{4^n-1}{4-1} - 2\times 2\frac{2^n-1}{2-1} && (3) \text{ et } (2) \\
&= \frac{8}{3}(4^n-1) - 4(2^n-1) \\
S_n &= \frac{8}{3}4^n - 2^{n+2} - \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

(1) : par linéarité
(2) : on reconnait une somme géométrique de raison $2 \neq 1$
(3) : on reconnait une somme géométrique de raison $4 \neq 1$

Finalement, $\boxed{S_n = \frac{8}{3}4^n - 2^{n+2} - \frac{20}{3}.}$

Exercice 2

1. On calcule :

$$u_0 = 1+1 = 2$$
$$u_1 = 2\times\frac{3}{2} = 3$$
$$u_2 = 2\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4} = \frac{15}{4}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{2^k}\geq 0$ donc $1+\frac{1}{2^k}\geq 1$.
Alors, par produit d'inégalités à termes positifs,

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geq \prod_{k=0}^{n} 1 = 1$$

On obtient :

$$u_n \geq 1$$

Ceci est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est minorée par 1.}}$

3. D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n\times\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

D'après la question 2, $u_n > 1$ donc $u_n > 0$. De plus :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$$

Ainsi, comme $u_n > 0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Par conséquent, la suite u est croissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n > 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $1 + \frac{1}{2^k} > 0$ donc d'après les propriétés du logarithme :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}).$$

Par concavité du logarithme,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$$

donc par sommation d'inégalités :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$.

$$\ln(u_n) \leq 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leq 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$$

6. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) \leq 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$$

donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq e^2$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est majorée par e^2.

7.
```
def U(n):
    P = 1
    for i in range(n+1) :
        P = P*(1+1/2**i)
    return(P)
```

Exercice 3

1. `Mystere(L)` renvoie `True` si la liste de nombres `L` est triée dans l'ordre décroissant, et `False` sinon.

2.
```
def SommeCarres(L) :
    S = 0
    for i in L :
        S = S+i**2
    return(S)
```

3.

```
def estSymetrique(L) :
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] != L[-(i+1)] :
            return(False)
    return(True)
```

4.

```
def Symetrisee(L) :
    G = []
    for i in L :
        G.append(i)
    for i in range(1,len(L)+1) :
        G.append(L[-i])
    return(G)
```

Exercice 4

1. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2) = (\lambda+\mu+\gamma)X^2 + (-\lambda-2\mu-3\gamma)X + 2\gamma$$

puis on a les équivalences

$$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2) \iff aX^2+bX+c = (\lambda+\mu+\gamma)X^2 + (-\lambda-2\mu-3\gamma)X + 2\gamma$$

$$\underset{(1)}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = a \\ -\lambda - 2\mu - 3\gamma = b \\ 2\gamma = c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = a \\ -\mu - 2\gamma = a+b \\ 2\gamma = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = a - \mu - \gamma = a + a + b + c - \dfrac{1}{2}c = 2a + b + \dfrac{1}{2}c \\ \mu = -(a+b+2\gamma) = -a-b-c \\ \gamma = \dfrac{1}{2}c \end{cases}$$

(1) : d'après le théorème d'identification, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux.

Par équivalence, on en déduit :

> Il existe un unique triplet de réels (λ, μ, γ) tel que
>
> $$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2)$$
>
> donné par : $(2a+b+\dfrac{1}{2}c, -a-b-c, \dfrac{1}{2}c)$.

2. **Analyse.**

Par hypothèse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \lambda x(x-1) + \mu x(x-2) + \gamma(x-1)(x-2)$$

Ainsi, pour $x = 2$, on a :

$$P(2) = \lambda \times 2 \times 1 + \mu \times 0 + \gamma \times 0$$

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2).$$

Pour $x = 0$, il vient $P(0) = 2\gamma$ donc $\gamma = \frac{1}{2}P(0)$.

Pour $x = 1$, il vient $P(1) = -\mu$ donc $\mu = -P(1)$.

Finalement :

Si un tel triplet (λ, μ, γ) existe, alors il est unique, et est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2),\ \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0).$$

3. **Synthèse.**

On pose donc $Q(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2)$ avec :

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2),\ \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0).$$

(a) $Q(0) = 0 + 0 + 2\gamma = 2 \times \frac{1}{2}P(0) = P(0)$.
$Q(1) = 0 - \mu + 0 = -(-P(1)) = P(1)$.
$Q(2) = 2\lambda + 0 + 0 = 2 \times \frac{1}{2}P(2) = P(2)$.

Ceci démontre $\boxed{\forall i \in \{0,1,2\},\quad P(i) = Q(i).}$

(b) Q est de degré au plus 2, comme somme des polynômes $\lambda X(X-1)$, $\mu X(X-2)$ et $\gamma(X-1)(X-2)$ de degré au plus 2.

Par conséquent, $P - Q$ est un polynôme de degré au plus 2 comme somme de polynômes de degré au plus 2. Or, d'après la question précédente, pour tout $i \in \{0,1,2\}$:

$$(P-Q)(i) = P(i) - Q(i) = 0.$$

Ainsi, $P - Q$ est un polynôme de degré au plus 2 admettant 3 racines distinctes, et $3 > 2$.
On en déduit que $P - Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Autrement dit, $\boxed{P = Q}$

(c) D'après la question précédente, le triplet (λ, μ, γ) donné par

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2),\ \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0)$$

est solution du problème posé. D'après la conclusion de la question 2 :

Il existe un unique triplet de réels (λ, μ, γ) tel que

$$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2),$$

donné par $(\frac{1}{2}P(2), -P(1), \frac{1}{2}P(0))$

Exercice 5

1.

```
def SuiteU(n) :
    u = 0
    for i in range(n) :
        u = (2*u+1)/(2+u)
    return(u)
```

2. Montrons par récurrence que pour tout entier n,

$$P(n) : \text{« } u_n \text{ est bien défini et } 0 \leq u_n < 1 \text{ »}$$

• Initialisation : $P(0)$ s'écrit « u_0 est bien définie et $0 \leq u_0 < 1$ », ce qui est clair vu la définition donnée de la suite u ($u_0 = 0$).

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n est bien définie et $0 \leq u_n < 1$. En particulier, $2 + u_n \geq 2$ donc $2 + u_n \neq 0$. Ainsi, u_{n+1} est bien défini par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}.$$

Or, u_{n+1} est positif comme quotient de réels positifs ($2u_n + 1 \geq 1$ car $u_n \geq 0$, et $2 + u_n \geq 2 > 0$).
De plus, $u_n < 1$ donc $u_n + 1 < 2$, donc $2u_n + 1 < u_n + 2$. Par quotient ($u_n + 2 > 0$) :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n} < 1$$

Finalement, on a bien montré : u_{n+1} est bien défini et $0 \leq u_{n+1} < 1$, d'où l'hérédité.

• Conclusion : Par récurrence, on a bien montré que

$$\boxed{u_n \text{ est bien défini et vérifie } 0 \leq u_n < 1, \text{ pour tout entier } n.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1 - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{1 - u_n^2}{2 + u_n}.$$

Or, d'après la question précédente, $0 \leq u_n < 1$ donc par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $u_n^2 < 1$. Ainsi,

$$1 - u_n^2 > 0.$$

On a de plus $2 + u_n > 0$ donc par quotient :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement croissante.}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \geq 0$ d'après la question 2.
D'une part, $u_n + 1 \geq 1$ donc $u_n + 1 \neq 0$.
D'autre part, $u_n < 1$ donc $u_n - 1 < 0$ donc $u_n - 1 \neq 0$.
Ainsi, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ est bien défini, et est non nul comme quotient de réels non nuls.

On a bien montré : $\boxed{\text{Pour tout entier } n, v_n \text{ est bien défini et non nul}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la suite u, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n+1}{2+u_n} - 1}{\frac{2u_n+1}{2+u_n} + 1} = \frac{\frac{2u_n+1-2-u_n}{2+u_n}}{\frac{2u_n+1+2+u_n}{2+u_n}} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

$\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{3}.}$

6. La suite v étant géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or, $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

7. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $(E_y) : \dfrac{x-1}{x+1} = y$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+1 = 0 \iff x = -1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$y = \frac{x-1}{x+1} \iff y(x+1) = x-1 \iff (y-1)x = -1-y.$$

- Cas 1 : $y = 1$
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$x \text{ est solution de } (E_1) \iff 0 = -2$$

  Cette dernière assertion étant fausse, l'équation (E_1) n'admet pas de solution

- Cas 2 : $y \neq 1$
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$x \text{ est solution de } (E_y) \iff x = \frac{1+y}{1-y}$$

  L'unique solution de (E_y) est $\dfrac{1+y}{1-y}$.

Finalement, on obtient la conclusion suivante :

Si $y = 1$, (E_y) n'admet pas de solution. Sinon, l'unique solution de (E_y) est $\dfrac{1+y}{1-y}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Autrement dit, u_n est solution de l'équation :

$$v_n = \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Cette équation admet une solution donc d'après la question précédente, $v_n \neq 1$ et $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
En utilisant la question 6 :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

Exercice 6

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m &\iff e^x - e^{-x} = 2m \\ &\iff e^x - 2m - e^{-x} = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - 2me^x - 1 = 0 \text{ (car } e^x \neq 0) \\ &\iff e^x \text{ est racine du polynôme } X^2 - 2mX - 1 \end{aligned}$$

On note $P(X) = X^2 - 2mX - 1$. C'est un polynôme de degré 2.

Le discriminant de P est $\Delta = 4m^2 + 4$. Or, $m^2 \geq 0$ donc $4m^2 \geq 0$ donc $\Delta > 4 \geq 0$.

Ainsi, P admet deux racines distinctes données par :

$$x_1 = \frac{2m + \sqrt{4m^2+4}}{2} = m + \sqrt{m^2+1}$$

et

$$x_2 = \frac{2m - \sqrt{4m^2+4}}{2} = m - \sqrt{m^2+1}.$$

Montrons que $x_2 < 0 < x_1$.

On a $m^2 + 1 > m^2 \geq 0$ donc par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = |m|.$$

Ainsi, $\sqrt{m^2+1} > |m| \geq -m$ donc $m + \sqrt{m^2+1} > 0$, d'où $x_1 > 0$.

De même, $\sqrt{m^2+1} > |m| \geq m$ donc $m - \sqrt{m^2+1} < 0$ donc $x_2 < 0$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x = x_1 \text{ ou } e^x = x_2 \iff e^x = x_1 \text{ (car } e^x > 0 \text{ et } x_2 < 0)$$

Comme $x_1 > 0$, par injectivité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x = x_1 \iff x = \ln(x_1).$$

Finalement, $\boxed{\text{l'équation } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \text{ admet pour unique solution } \ln(m + \sqrt{m^2+1}).}$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^5 - k^5)$.

D'une part, par télescopage,

$$T_n = (n+1)^5 - 1^5 = (n+1)^5 - 1$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(k+1)^5 = (k+1)(k+1)^2(k+1)^2 = (k+1)(k^2+2k+1)(k^2+2k+1)$$

d'où

$$(k+1)^5 = (k+1)(k^4+4k^3+6k^2+4k+1) = k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

et alors

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

Ainsi, par linéarité

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1) = 5S_n + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

On reconnait une somme constante et les sommes usuelles suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
5S_n &= T_n - 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)^5 - 1 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)^5 - 5\frac{n^2(n+1)^2}{2} - 5\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= (n+1)\left((n+1)^4 - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - 5\frac{n(2n+1)}{3} - 5\frac{n}{2} - 1\right) \\
&= (n+1)\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - 5\frac{n(2n+1)}{3} - 5\frac{n}{2} - 1\right) \\
&= (n+1)\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 5\frac{n^2(n+1)}{2} - 5\frac{n(2n+1)}{3} - 5\frac{n}{2}\right) \\
&= n(n+1)\left(n^3 + 4n^2 + 6n + 4 - 5\frac{n(n+1)}{2} - 5\frac{(2n+1)}{3} - \frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(6n^3 + 24n^2 + 36n + 24 - 15n(n+1) - 10(2n+1) - 15) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\
5S_n &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité s'obtient car, comme le suggère l'aide de calcul,

$$(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^3 + 6n^2 - 2n + 3n^2 + 3n - 1 = 6n^3 + 9n^2 + n - 1$$

En divisant par 5, on obtient $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$