

Programme de colle n° 8 : Ensembles et applications.

Semaine du lundi 20 novembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Ensembles

8.1 Rappels des ensembles classiques. Définition des ensembles en extension, en compréhension.

8.2 Inclusion, méthodes pour démontrer une inclusion. Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments. Démonstrations par double inclusion. Ensemble des parties d'un ensemble.

8.3 Opérations ensemblistes : réunion, intersection, complémentaire de parties d'un ensemble E . Différence ensembliste. Notion d'ensembles disjoints. Propriétés élémentaires de la réunion, de l'intersection et de l'opération de passage au complémentaire. Commutativité, associativité, distributivité et lois de De Morgan pour les opérations ensemblistes.

8.4 Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Unions et intersections généralisées (indexées par un ensemble I). Familles d'éléments de E indexées par un ensemble I .

On ne posera pas d'exercices trop abstraits sur ces notions.

Applications

8.5 Notion d'application. Application identité. Antécédent, ensemble image. Composition d'applications. Restriction, corestriction.

8.6 Applications injectives. Toute fonction réelle strictement monotone est injective. Méthode pour démontrer qu'une application est injective.

Python

8.7 Quelques exercices classiques sur les listes, dont une recherche de maximum et des versions enrichies.

Quelques questions de cours

- Définir la notion de partie d'un ensemble E . Définir l'ensemble des parties d'un ensemble E . Déterminer $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$.
- Définir l'intersection de deux parties d'un ensemble E . Énoncer la proposition (16) donnant des propriétés élémentaires de l'intersection, et en démontrer certaines (au choix de l'interrogateur).
- Définir la réunion de deux parties d'un ensemble E . Énoncer la proposition (17) donnant des propriétés élémentaires de la réunion, et en démontrer certaines (au choix de l'interrogateur).
- Énoncer et démontrer les propriétés de distributivité des opérations ensemblistes. Faire de même pour les lois de De Morgan.

5. Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

6. Déterminer l'ensemble image de la fonction $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \longmapsto \frac{2x}{x-1} \end{array}$ en déterminant les éventuels antécédents d'un réel quelconque y .

7. Soit A_r l'ensemble des suites arithmétiques de raison $r \in \mathbb{R}$ fixée. Démontrer l'injectivité de $\left. \begin{array}{l} A_r \\ u \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \longmapsto u_0 \end{array}$. Quel est son ensemble image?

8. Écrire le code d'une fonction Python nommée `MaxListOcc` prenant en entrée une liste de nombres L non vide et renvoyant en sortie le couple (m, P) formée du maximum m de L et de la liste P des indices des occurrences de ce maximum.