

Pour commencer

Ensembles

Exercice 1 Soit E un ensemble usuel (un ensemble de nombres, de fonctions, de suites, d'applications...) et $x \in E$. Parmi les propriétés ci-dessous, lesquelles sont correctes?

- | | | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| (a) $x \in \{x\}$ | (c) $x \in \{\{x\}\}$ | (e) $x \subset \{x\}$ | (g) $x \subset \{\{x\}\}$ |
| (b) $\{x\} \in \{x\}$ | (d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ | (f) $\{x\} \subset \{x\}$ | (h) $\{x\} \subset \{\{x\}\}$ |

(HP : Quelles énoncés deviennent corrects pour $x = \emptyset$?)

Exercice 2 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Simplifier les expressions :

- (a) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
 (b) $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})$
 (c) $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

Exercice 3 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.

Exercice 4 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $\bar{A} \subset B \iff \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \iff E = A \cup B$.

Exercice 5 Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$.

On suppose que $A \subset B \cap C$ et $B \cup C \subset A$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 6 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . On suppose que $A \cup B = A \cap C$, $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 7 Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on considère la fonction $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On dit que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A . Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}$, pour tout $B \subset \mathbb{R}$:

- (a) $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$
 (b) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$
 (c) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

Exercice 8 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On pose $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ et on dit que Δ est l'opération de différence symétrique.

- (a) Représenter sur un diagramme cette notion de différence symétrique.
 (b) Déterminer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$ lorsque $A \subset E$.
 (c) Montrer que pour toutes parties $A, B \subset E$, on a $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.
 (d) Comment interpréter en termes logiques l'opération Δ ?

Fonctions : ensembles images et bijections réciproques

Exercice 9 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x - 1 \end{array} .$$

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Exercice 10 On considère la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

Déterminer l'ensemble image $f([-1, 1])$.

Exercice 11 Montrer que les applications suivantes sont bijectives, et déterminer leurs bijections réciproques :

$$(a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 1$$

$$(e) f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

$$(i) f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$(b) f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x)$$

$$(f) f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$$

$$(j) f :]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{1-x}$$

$$(c) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \ln(1+e^x)$$

$$(g) f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

$$(k) f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

$$(d) f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_- \\ x \mapsto \ln(1-x^2)$$

$$(h) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x|x|$$

$$(l) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$$

Exercice 12 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$.

(a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $f(\mathcal{D}_f)$.

(b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 13 On considère les trois fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par les trois formules

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque.

(b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

(c) Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Applications

Exercice 14 L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$ est-elle bijective? Si oui, déterminer sa réciproque.

Exercice 15 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

(a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 16 Soit $f : E \rightarrow E$ une application.

Montrer que $f \circ f$ est bijective si, et seulement si, f est bijective.

Exercice 17 Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Lorsque ces conditions équivalentes sont réalisées, déterminer f^{-1} .

Exercice 18 Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A, B \subset E$.

(a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c) A-t-on nécessairement $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

(d) Montrer que f est injective $\iff (\forall A \subset E, \forall B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.

Exercice 19 Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.

- (a) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A = E$.
- (b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A = E$.

Exercice 20 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$.

- (a) Montrer que f est injective $\iff A \cup B = E$.
- (b) Montrer que f est surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.
- (c) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1} .

Pour continuer

Exercice 21 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. Montrer que $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = B \iff A = \emptyset$.

Exercice 22 Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$.

Montrer que $A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$.

Exercice 23 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $A \cap B = A \cup C$. Montrer que $A = B = C$.

Exercice 24 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

On suppose que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.

Exercice 25 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$.

Déterminer tous les sous-ensembles $X \subset E$ tels que $A \cup X = B$ (resp. $A \cap X = B$).

Exercice 26 Soit E un ensemble et $A, B \subset E$. On rappelle que $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$.

- (a) Représenter sur un diagramme cette notion de différence. Montrer $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
- (b) Déterminer $A \setminus A$ et $A \setminus \emptyset$ lorsque $A \subset E$.
- (c) Montrer l'équivalence : $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$ (comment se nomme ce cas?).

Exercice 27 On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x-1}{x+1} \end{array}$.

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Exercice 28 On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$.

Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

Exercice 29 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{array}$$

Déterminer l'ensemble image $f(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$.

Exercice 30 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$.

- (a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $f(\mathcal{D}_f)$.
- (b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 31 On considère la fonction définie par la formule $f(x) = x + \ln(2 + e^x)$.

Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis $f(\mathcal{D}_f)$ et montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$ et déterminer f^{-1} .

Exercice 32 Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array}$.

(a) Montrer que f est injective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

(b) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

Exercice 33 Soit E un ensemble et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \bar{X} \end{array}$.

(a) Déterminer l'application $f \circ f$.

(b) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 34 Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $B \subset E$.

On rappelle que la différence symétrique de A et B le sous-ensemble de E défini par :

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

(a) Soient $A, B \subset E$. Déterminer $A \Delta (A \Delta B)$.

(b) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & A \Delta B \end{array}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 35 Pour tous ensembles E et F et toute application $f : E \longrightarrow F$, on pose $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array}$.

(a) Soit $f : E \longrightarrow F$. Montrer que : $\widehat{f}$ est injective $\iff f$ est injective.

(b) Soit $f : E \longrightarrow F$. Montrer que : $\widehat{f}$ est surjective $\iff f$ est surjective.

(c) Soit $f : E \longrightarrow F$. Montrer que : f bijective $\implies (\widehat{f})^{-1} = \widehat{f^{-1}}$.