Chapitre 7 : Ensembles et applications

ECG1 A, Lycée Hoche

Partie I : ensembles

Rappels sur les ensembles

On ne définit pas la notion d'ensemble. Un ensemble désigne un ensemble d'objets mathématiques, appelés ses éléments. On manipule déjà de nombreux ensembles.

(*i*) L'ensemble vide $\emptyset$. Il s'agit de l'unique ensemble ne contenant aucun élément.

(*ii*) Les ensembles de nombres usuels sont :

- (a) L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs,
- (b) l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers relatifs,
- (c) l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels, l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des réels non nuls, etc.

(*iii*) Si D est une partie de $\mathbb{R}$ (un intervalle par exemple), l'ensemble $\mathbb{R}^D$ désigne l'ensemble des fonctions réelles $f : D \to \mathbb{R}$,

(*iv*) $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes réels, et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus n,

(*v*) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ Est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$.

(*vi*) Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets de réels, c'est-à-dire l'ensemble des données $(x_1, \ldots, x_n)$ de n réels dans un ordre précisé.

(*vii*) On peut facilement décrire des ensembles finis : $\{1, 2, 3, 14\}$ est un ensemble contenant 4 éléments : les entiers 1, 2, 3 et 14.

Remarque. Les éléments d'un ensemble sont donnés "sans ordre". **Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments**.

Pour définir un ensemble, on peut procéder

(*i*) **En extension :** on décrit les éléments de cet ensemble par une formule, paramétrée à l'aide d'autres ensembles. Par exemple,

$$\{X^n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

désigne l'ensemble formé par tous les polynômes de la forme $X^n + 1$ pour un certain entier naturel n. De même,

$$\{n^2 - m^2 | n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$$

désigne l'ensemble des nombres de la forme $n^2 - m^2$, pour les paramètres n et m parcourant l'ensemble des nombres entiers.

Les ensembles finis suffisamment petits peuvent être décrits par extension de manière pus directe, comme par exemple

$$\{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

(ii) **En compréhension** : on définit un ensemble comme l'ensemble des éléments d'un autre ensemble vérifiant une certaine propriété (à paramètre).

Par exemple,

$$\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2 + 1\}$$

désigne l'ensemble des entiers n s'écrivant sous la forme $k^2 + 1$, pour un certain entier k. Cet ensemble est donc l'ensemble des entiers suivant un le carré d'un entier.

$$\{P \in \mathbb{R}_{14}[X] | P(0) = P(1) = 0\}$$

désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus 14 admettant 0 et 1 comme racines.

Remarque. Soit E un ensemble et x un objet mathématique. « $x \in E$ » signifie que x est un élément de E, et « $x \notin E$ » signifie que x n'est pas un élément de E.

Remarque. On appelle *singleton* tout ensemble contenant exactement un élément. Par exemple, $\{2\}$ se lit "singleton 2", et est l'ensemble ne contenant que l'entier 2.

I. Parties d'un ensemble

1. Inclusion

Définition 1. Soient A et B des ensembles. On dit que A *est inclus dans* B, et on note $A \subset B$, si tout élément de A est aussi élément de B.
Autrement dit :

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

On dit aussi que A *est un sous-ensemble de* B, ou que A *est une partie de* B.

Exemple 2. À noter.

Remarque. Soit E un ensemble. Alors, $\emptyset \subset E$. Autrement dit, l'ensemble vide est une partie de tout ensemble. En effet, celui-ci n'ayant aucun élément, la propriété que chacun de ses éléments est élément de E est vraie (la contrainte est vide).

Une autre inclusion triviale : $E \subset E$.

Remarque. Méthode : Soient A et B deux ensembles. Pour démontrer $A \subset B$, on démontre $\forall x \in A, x \in B$. Autrement dit :

- On considère un élément x de A quelconque ("Soit $x \in A$").
- On démontre que $x \in B$.

Exemple 3. Posons $A = \{x^2 + 2x + 1 | x \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \mathbb{R}_+$. Montrons $A \subset B$.

2. Égalité d'ensembles

On a vu que deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments. Autrement dit

Proposition 4. *Soient A et B deux ensembles. Alors, $A = B$ si et seulement si :*

$$A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Remarque. Méthode : Pour démontrer l'égalité de deux ensembles A et B, on procède généralement en deux temps, en démontrant $A \subset B$ et $B \subset A$. On dit alors qu'on procède par *double inclusion.*

Exemple 5. Montrons que $\mathbb{R}_+^* = \{x^2 | x \in \mathbb{R}^*\}$.

Remarque. Méthode : Pour deux montrer l'égalité de deux parties A et B d'un ensemble E (ce qui est le contexte dans la majorité des cas), on peut procéder par équivalence :

- On considère un élément $x \in E$ quelconque ("Soit $x \in E$").
- On démontre : $x \in A \iff x \in B$.

Exemple 6. Montrons que $\{x \in \mathbb{R} | |x-1| = 4\} = \{5, 3\}$.

3. Ensemble des parties

Définition 7. Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de* E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble formé de toutes les parties de E. Ainsi, pour tout ensemble A :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemple 8. (*i*) Prenons $E = \{0, 1, 2\}$. Alors :
$\mathcal{P}(E) =$

(*ii*) Soit E un ensemble. Alors, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

(*iii*) $[2, 5[\in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_3[X] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}[X])$.

(*iv*) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-elle une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$?

Remarque. Pour énumérer l'ensemble des parties d'un ensemble fini, on peut procéder par cardinal croissant (le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments). Exemple :

Exercice 9. Déterminer $\mathcal{P}(\{1\})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

II. Union, intersection, complémentaire

1. Opérations

Définition 10. Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

(*i*) On appelle *réunion de* A *et* B, et on note $A \cup B$ (lire "A union B"), l'ensemble des éléments de E qui sont éléments de A ou de B. Autrement dit :

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

(*ii*) On appelle *intersection de* A *et* B, et on note $A \cap B$ (lire "A inter B"), l'ensemble des éléments de E à la fois dans A et dans B. Autrement dit :

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

(*iii*) On appelle *complémentaire de* A *dans* E, et on note $\mathcal{C}_E(A)$ ou $\bar{A}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit :

$$\bar{A} = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Exemple 11. (*i*) $[0, 2] \cap]1, 4] = \dots$

(*ii*) $[0, 2] \cup]1, 4] = \dots$

(*iii*) $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(]2, 3]) = \dots$

Remarque. Pour comprendre des résultats simples faisant intervenir unions, intersection et complémentaire, on peut utiliser des dessins appelés diagrammes de Venn, (ou plus modestement des patates). Par exemple, représentons $A \cup (B \cap C)$ à partir d'ensembles A, B, C pensés quelconques.

Remarque. **Attention**, la notation au programme $\bar{A}$ peut être trompeuse.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, et de $\mathbb{R}$, mais $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ ne sont pas les mêmes ensembles (donc si on les note tous les deux $\bar{\mathbb{N}}$, on créer une ambiguïté). On n'utilisera donc cette notation que quand le contexte est clair.

Une version "plus générale du complémentaire" :

Définition 12. Soient A et B deux ensembles. On appelle *différence de A et B*, et on note $A \setminus B$ (lire "A privé de B"), l'ensemble

$$A \setminus B = \{a \in A | a \notin B\}.$$

Exemple 13. $[0, 2] \setminus [1, 3] = \dots$

Définition 14. Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 15. $[1, 3]$ et $[2, 4]$ sont-ils disjoints? $[1, 3]$ et $[4, 5]$?

Remarque. **Attention :** Il n'y a pas de règles de priorité entre la réunion et l'intersection. Par exemple, si A, B et C sont des ensembles, on ne peut écrire

$$A \cup B \cap C$$

car on ne sait pas s'il faut l'interpréter $(A \cup B) \cap C$ ou $A \cup (B \cap C)$ (et ces deux ensembles sont à priori distincts).

Dans nos calculs ensemblistes faisant intervenir réunion et intersection, on ne peut donc se passer de parenthèses.

2. Propriétés des opérations

Proposition 16. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :*

(i) $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ *et* $A \cap E = A$.

(ii) $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$.

(iii) $A \subset B \iff A \cap B = A$.

(iv) Pour tout ensemble C :

$$C \subset A \cap B \iff C \subset A \text{ et } C \subset B.$$

Démonstration. À noter. □

Proposition 17. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :*

(i) $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cup E = E$.

(ii) $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$.

(iii) $A \subset B \iff A \cup B = B$.

(iv) Pour tout ensemble C :

$$A \cup B \subset C \iff A \subset C \text{ et } B \subset C.$$

Démonstration. À noter. □

Dans la proposition suivante, tous les complémentaires sont pris dans E.

Proposition 18. *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Alors :*

(i) $\bar{\emptyset} = E$ *et* $\bar{E} = \emptyset$.

(ii) $\bar{\bar{A}} = A$.

(iii) $A \cup \bar{A} = E$ *et* $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

(iv) $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 19. (une caractérisation des parties disjointes) Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

(*i*) Montrer que $A \subset \bar{B} \iff B \subset \bar{A}$.

(*ii*) En déduire :

$$A \cap B = \emptyset \iff A \subset \bar{B} \iff B \subset \bar{A}.$$

Enfin, voici les dernières propriétés calculatoires des opérations ensemblistes.

Proposition 20. *Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E Alors :*

(*i*) *Commutativité :*
$$A \cup B = B \cup A \text{ et } A \cap B = B \cap A.$$

(*ii*) *Associativité :*
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ et } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(*iii*) *Distributivités :*
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(*iv*) *Lois de De Morgan :*
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 21. Représentons sur un diagramme "en patate", et simplifions $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, où A et B sont des parties d'un ensemble E.

Exercice 22. Même question pour $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

III. Produit cartésien d'ensembles, notations généralisées

1. Produit cartésien

Définition 23. Soient E et F deux ensembles.

(*i*) On appelle couple d'un élément de E et d'un élément de F la donnée ordonnée, notée (e, f), d'un élément $e \in E$ et d'un élément $f \in F$. Ainsi,

$$\forall e \in E, \forall e' \in E, \forall f \in F, \forall f' \in F, (e, f) = (e', f') \iff e = e' \text{ et } f = f'.$$

(*ii*) On appelle *produit cartésien* de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples d'un élément de E et de F.
$$E \times F = \{(e, f) | e \in E, f \in F\}.$$

Exemple 24. (*i*) $(3, \mathrm{e}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

(*ii*) $R^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(*iii*) $(\frac{2}{3}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car $\frac{2}{3}$ n'est pas un entier.

(*iv*) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset R^2$.

Définition 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots E_n$ des ensembles.

(*i*) On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ la donnée ordonnée, notée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, d'éléments $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ..., $e_n \in E_n$.

(*ii*) On appelle produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ (ou $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$) formé de ces n-uplets :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) | e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n\}.$$

Remarque. Comme pour les couples : $\forall (e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n, \forall (f_1, \ldots, f_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$,

$$(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_n) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], e_i = f_i.$$

Exemple 26. On peut faire le produit cartésien de tout type d'ensemble pour décrire des données successives. Par exemple :

(*i*) $(2, (23^n)_{n\in\mathbb{N}}, \pi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$.

(*ii*) "Soit $(x, f, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}[X]$" revient à considérer de manière quelconque un réel x, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un polynôme P.

(*iii*) Que signifie "$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X], y(x) = 0$" ? Que dire de cet énoncé?

Définition 27. Soit E un ensemble. Pour tout $n \geq 1$, on note $E^n = E \times E \times \ldots \times E$ (n facteurs) le produit cartésien de E avec lui-même n fois. Les éléments de E^n sont appelés les n-uplets d'éléments de E.

2. Unions et intersections généralisées

On peut vouloir faire la réunion et l'intersection de plus d'un nombre fini d'ensembles. Ce "nombre" d'ensemble est alors décrit par un ensemble I, qu'on pense comme à un ensemble d'indexation.

On le note alors ainsi.

Définition 28. Soit E un ensemble. Soit I un ensemble, et considérons une partie E_i de E pour chaque $i \in I$.

(*i*) On appelle *réunion des E_i pour $i \in I$*, et on note $\bigcup_{i\in I} E_i$, l'ensemble des éléments de E qui sont élément d'au moins une des parties E_i, pour $i \in I$. Autrement dit :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{e \in E | \exists i \in I, e \in E_i\}$$

(*ii*) On appelle *intersection des E_i pour $i \in I$*, et on note $\bigcap_{i\in I} E_i$, l'ensemble des éléments de E qui sont élément de toutes les parties E_i, pour $i \in I$. Autrement dit :

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \{e \in E | \forall i \in I, e \in E_i\}$$

On peut démontrer des propriétés similaires à celles déjà vues pour les unions et intersection de deux parties. Par exemple :

Proposition 29. *Soit E un ensemble. Soit I un ensemble, et considérons une partie E_i de E pour chaque $i \in I$.*

(i) Pour tout ensemble B :
$$\bigcup_{i\in I} E_i \subset B \iff \forall i \in I, E_i \subset B.$$

(ii) Pour tout ensemble B :
$$B \subset \bigcap_{i\in I} E_i \iff \forall i \in I, B \subset E_i.$$

Démonstration. En exercice. □

Exemple 30. Montrons que :

(i) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] =$

(ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]1 - \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}[=$

3. Famille indexée par un ensemble

De même, on peut vouloir donner une succession (potentiellement infinie) d'éléments d'un ensemble E (généralisant le produit cartésien). Encore une fois, on décrit cette succession quelconque par un ensemble, noté I ci-dessous, appelé ensemble d'indexation.

Définition 31. Soit E un ensemble. Soit I un ensemble.

(i) On appelle *famille d'éléments de E indexée par I* la donnée, notée $(e_i)_{i\in I}$, d'un élément e_i de E pour chaque $i \in I$.

(ii) On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I. Ainsi :
$$E^I = \{(e_i)_{i\in I} | \forall i \in I, e_i \in E\}.$$

(iii) En particulier, si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ sont deux familles d'éléments de E indexées par I :
$$(e_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I} \iff \forall i \in I, e_i = f_i.$$

Exemple 32. Les notations sont cohérentes : toute suite réelle indexée par $\mathbb{N}$ $u = (u_n)_{n\in N}$ est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ est bien... l'ensemble des famille de réels indexées par $\mathbb{N}$.

Exemple 33. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la donnée d'un réel $f(r)$ pour chaque réel r. C'est une autre manière de définir la notion de fonction réelle (légèrement HP).

Exemple 34. On lance un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Notons Ω un univers modélisant cette expérience aléatoire, et X la variable aléatoire définie sur Ω donnant le résultat du dé. Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, $[X = i]$ désigne l'événement "Le dé tombe sur la face i", et $X(\Omega)$ désigne l'ensemble $[\![1, 6]\!]$ des résultats possible. Alors, $([X = i])_{i\in X(\Omega)}$ est une famille d'événements indexée par $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

Partie II : applications

IV. Applications

1. Généralités

Définition 35. On appelle *application* la donnée notée f :

(i) d'un ensemble A appelé l'ensemble de départ de f,

(ii) d'un ensemble B appelé l'ensemble d'arrivée de f,

(iii) d'un élément $f(a)$ de B, pour tout $a \in A$.

L'application f est alors notée $f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$. On dit aussi que f est une application de A vers B. Pour tout $a \in A$, on dit que $f(a)$ est l'image de a par f.
L'ensemble des applications de A vers B est noté B^A.

En fait, toutes les opérations courantes sont des applications.

Exemple 36. (i) Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ n'est rien d'autre qu'une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(ii) Un élément u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la donnée, pour tout entier naturel n, d'un réel $u(n)$. On retrouve ici la notion de suite réelle, ou de famille de réels indexée par $\mathbb{N}$.

(iii) On peut considérer l'application d'évaluation en 0 d'un polynôme :

$$e_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array}.$$

La dérivation des polynômes est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$

(iv) La somme de réels est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}.$$

(v) On peut considérer l'application suivante, donnant la parité d'un entier :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si n pair} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Remarque. Donner une application, c'est donner son ensemble de départ A, son ensemble d'arrivée B, et les images $f(a) \in B$ de chaque élément $a \in A$. Ainsi, les trois applications suivantes ne sont pas égales :

(i) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

(ii) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

(iii) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

Elles sont *bien définies*, car la formule donnée associe bien un élément de l'ensemble d'arrivée à chaque élément de l'ensemble de départ. Par contre, l'application suivante est mal définie (ceci est une faute et ne définit rien du tout) :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right. .$$

Remarque. Pour considérer une application quelconque en ne nommant que ses ensembles de départ et d'arrivée, on écrit "Soit $f : A \to B$ une application". Alors, f est une application quelconque de A vers B (ensembles quelconques), et la notation $f(a)$, pour $a \in A$, peut être utilisée sans ambiguïté.

Remarque. On peut représenter des applications simples avec des diagrammes en patates (à noter). Cela permet de se faire une intuition sur les notions que nous allons voir, dans certains cas.

Exemple 37. Exemple fondamental : Soit E un ensemble. On appelle *application identité de* E l'application notée Id_E donnée par :

$$\mathrm{Id}_E : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right. .$$

2. Antécédents, ensemble image

Définition 38. Soit $f : A \to B$ une application. Soit $b \in B$. On appelle *antécédent de b par f* tout élément $a \in A$ tel que $f(a) = B$.

Exemple 39. (*i*) Considérons $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$. On peut démontrer que l'unique antécédent de 1 par g est 1.

(*ii*) X^2+1 et X^2+2 sont deux antécédents du polynôme $2X$ par l'application de dérivation $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$.

Remarque. Méthode : Dans les cas pratiques, pour déterminer l'ensemble des antécédents par $f : A \to B$ de $b \in B$, on peut chercher à résoudre l'équation $f(a) = b$ d'inconnue $a \in A$.

Exemple 40. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quels sont les antécédents de y par $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x-1} \end{array}\right.$?

Définition 41. Soit $f : A \to B$ une application.

(*i*) On appelle *ensemble image de f* l'ensemble noté $f(A)$ donné par l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(a) | a \in A\} = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}.$$

(*ii*) Plus généralement, pour toute partie C de A, on appelle ensemble image de C par f l'ensemble noté $f(C)$ donné par

$$f(C) = \{f(c) | c \in C\} = \{b \in B | \exists c \in C, f(c) = b\}.$$

Remarque. Attention, c'est une notation : on n'est pas en train d'évaluer la fonction f en un ensemble C.

Exemple 42. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$. Alors, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ (faire un dessin).

Remarque. Méthode : Pour déterminer l'ensemble image $f(A)$ d'une application $f : A \to B$, on détermine l'ensemble des $b \in B$ tels que l'équation $f(a) = b$ d'inconnue $a \in A$ a (au moins) une solution.

Exemple 43. Déterminons l'ensemble image de l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$.

3. Composition d'applications

Définition 44. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle *composée de f par g* l'application notée $g \circ f$ donnée par :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & C \\ a & \longmapsto & g(f(a)) \end{array} \right. .$$

Remarque. Cette application $g \circ f$ est bien définie, car l'ensemble de départ de g est égal à l'ensemble d'arrivée de f, donc pour tout $a \in A$, $g(f(a))$ est bien défini.

Remarque. Pour des fonctions réelles $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$, on se permet de considérer l'application composée $g \circ f$ dès lors que $f(D) \subset D'$. Ceci est une exception : pour qu'une composée d'applications générales soit bien définies, il faut que l'ensemble d'arrivée de la première soit l'ensemble de départ de la seconde.

Exemple 45. Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $g : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $h : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. Parmi $g \circ h, f \circ h, h \circ f, h \circ g$, quelles applications sont bien définies? Les déterminer.

Proposition 46. *Soit $f : A \to B$ une application. Alors, $f \circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_B \circ f = f$.*

Démonstration. en exercice. □

On peut tout de même avoir envie de considérer une composée $g \circ f$ à la seule condition que tous les $g(f(a))$ soient bien définis, pour tout a de l'ensemble de départ de f. Pour le faire, on n'écrit pas $g \circ f$ (comme expliqué ci-dessus), mais à la place on utilise les notions suivantes.

Définition 47. Soit $f : A \to B$ une application.

(*i*) Soit A' une partie de A. On appelle *restriction de f à A'* l'application notée $f_{|A'}$ donnée par :

$$f_{|A'} : \left| \begin{array}{lcl} A' & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right. .$$

(*ii*) Soit B' une partie de B telle que $f(A) \subset B'$. On appelle *corestriction de f à B'* l'application notée $f^{|B'}$ donnée par :

$$f^{|B'} : \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & B' \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right. .$$

Exemple 48. Si $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, alors :

$$f_{|\mathbb{R}_+} : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

$$f^{|\mathbb{R}_+} : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

Remarque. Attention à la condition $f(A) \subset B'$ sans laquelle la corestriction $f^{|B'}$ n'est pas définie. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, $f^{|\mathbb{R}_-}$ n'est pas définie (certaines images de f ne sont pas négatives).

Exemple 49. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \right.$. La composée $g \circ f$ n'est pas définie. Par contre :

$$g_{|\mathbb{R}_n[X]} \circ f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(0) \end{array} \right. .$$

V. Injectivité, surjectivité, bijectivité

1. Applications injectives

Définition 50. Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est *injective* si tout élément de B admet au plus un antécédent par f. Autrement dit, f est injective si :

$$\forall (a, a') \in A^2, f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

Remarque. On peut facilement se représenter cette notion sur un diagramme en patates (à noter).

Exemple 51. On retrouve la notion d'injectivité déjà vue pour les fonctions, qui se lit sur les graphes (à noter).

Exemple 52. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective, car $f(1) = f(-1)$ et $1 \neq -1$. Ainsi :

$$\exists (a, a') \in \mathbb{R}^2, f(a) = f(a') \text{ et } a \neq a'.$$

Exemple 53. Soit $r \in \mathbb{R}$ et A_r l'ensemble des suites arithmétiques de raison r définies sur $\mathbb{N}$. Alors, $f : \left| \begin{array}{ccc} A_r & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u_0 \end{array} \right.$ est injective. Montrons le.

Remarque. L'exemple précédent revient à dire : "une suite arithmétique de raison r est uniquement déterminée par son premier terme".

Pour montrer l'injectivité des fonctions réelles, on rappelle la :

Proposition 54. *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective.*

Voici une méthode plus générale.

Remarque. Méthode : Soit $f : A \to B$ une application.

- (i) Pour montrer que f est injective, on considère a et a' deux éléments quelconques de A. On suppose $f(a) = f(a')$ et on démontre que $a = a'$.
- (ii) Pour montrer que f n'est pas injective, on explicite deux éléments a, a' de A distincts tels que $f(a) = f(a')$.

Exercice 55. Les applications suivantes sont-elles injectives?

(i) $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right.$, $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x|x| \end{array} \right.$.

(ii) $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

(iii) $h : \left| \begin{array}{ccc} \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

2. Applications surjectives

Définition 56. Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est *surjective* si tout élément de B admet (au moins) un antécédent par f. Autrement dit, f est dite surjective si :

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$$

ou encore si :

$$f(A) = B.$$

Remarque. On peut facilement se représenter cette notion sur un diagramme en patates (à noter).

Exemple 57. On retrouve la notion de surjectivité déjà vue pour les fonctions, qui se lit sur les graphes (à noter).

Exemple 58. (i) La fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ est ...

(ii) La fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ est ...

(iii) Soit $r \in \mathbb{R}$ et A_r l'ensemble des suites arithmétiques de raison r définies sur $\mathbb{N}$. Alors, $f : \left| \begin{array}{ccc} A_r & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u_0 \end{array} \right.$ est surjective.

Remarque. Méthode : Pour déterminer si une application f est surjective, on peut déterminer l'ensemble image $f(A)$ de f. Autrement dit, on regarde pour quelles valeurs de $b \in B$ l'équation $f(a) = b$ d'inconnue $a \in A$ admet une solution.

f est alors surjective ssi cette équation admet une solution pour tout $b \in B$.

Pour montrer que f n'est pas surjective, on exhibe un élément b de B n'ayant pas d'antécédent par f.

Remarque. Soit $f : A \to B$ une application. Alors, $f^{|f(A)} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(A) \\ a & \longmapsto & f(a \end{array} \right.$ est surjective, et c'est évident (tout élément de $f(A)$ admet un antécédent par f, par définition).

VI. Applications bijectives

1. Bijectivité

Définition 59. On dit qu'une application $f : A \to B$ est *bijective* si elle est injective et surjective. Autrement dit, f est dite bijective si tout élément de B admet exactement un antécédent par f, c'est-à-dire si :

$$\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b.$$

Remarque. Représentons une application bijective sur un diagramme "en patates".

Remarque. Pour déterminer si une application $f : A \to B$ est bijective, on peut...

- Procéder en deux temps en étudiant son injectivité et sa surjectivité, ou bien
- Étudier, pour $b \in B$ fixé, l'équation $f(a) = b$ d'inconnue $a \in A$, et déterminer si cette équation admet une unique solution.

Exemple 60. Que dire de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité des applications :

(i) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.

(ii) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} + 1 \end{array}$.

(iii) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & x + y, x - y) \end{array}$.

(iv) $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array}$, où E est un ensemble quelconque (et où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E).

La spécificité d'une application bijective est qu'elle établit une correspondance parfaite entre les éléments de l'ensemble de départ, et ceux de l'ensemble d'arrivée (ce qui se voit bien avec des patates). On peut alors considérer cette correspondance dans l'autre sens.

Définition 61. Soit $f : A \to B$ une application bijective.

- (i) Soit $b \in B$. On appelle *image réciproque de b par f*, et on note $f^{-1}(b)$, l'unique antécédent de b par f.
- (ii) On appelle *bijection réciproque de f* l'application notée f^{-1} donnée par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & f^{-1}(b) \end{array}.$$

Exemple 62. (i) Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors, on a vu que f est bijective. f^{-1} est l'application

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right..$$

(ii) L'exponentielle : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ est bijective, de réciproque $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$ car:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, e^x = y \iff x = \ln(y).$$

(iii) Soit E un ensemble. Alors, Id_E est bijective, et $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$.

Remarque. Soit $f : A \to B$ une application. Supposons donné une application $g : B \to A$ telle que :

$$\forall b \in B, \forall a \in A, f(a) = b \iff a = g(b).$$

Alors, f est bijective et $f^{-1} = g$. En effet, cette condition indique que $g(b)$ est l'unique antécédent de b par f (pour tout $b \in B$). Par conséquent :

Remarque. Méthode : Pour déterminer si une application $f : A \to B$ est bijective et, le cas échéant, déterminer f^{-1}, on peut étudier l'équation $f(a) = b$ d'inconnue $a \in A$, de paramètre $b \in B$.

Exemple 63. Montrons que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$ est bijective, et déterminons sa bijection réciproque.

Remarque. On dit qu'une application $i : A \to A$ est involutive si $i \circ i = \mathrm{Id}_A$. On peut montrer (exercice, ou conséquence de la suite) qu'une application est involutive si et seulement si elle est bijective et vérifie $i^{-1} = i$.

Remarque. Vocabulaire : Soit $f : A \to B$ une application. Soit A' une partie de A et B' une partie de B. On dit que f *induit une bijection de A' vers B'* si l'application

$$f_{|A'}^{|B'} : \left| \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B' \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est bijective.

Par exemple, $x \mapsto x^2$ (définie à priori de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

Remarque. Attention : la notion de bijection réciproque (parfois aussi nommée application réciproque) et d'image réciproque n'est définie que pour une application bijective. Utiliser ce vocabulaire sur une application dont nous n'avons pas démontré la bijectivité est faux.

2. Bijection réciproque et composition

La bijection réciproque d'une application bijective peut être caractérisée à l'aide de compositions. voyons ça en deux propositions.

Proposition 64. *Soit $f : A \to B$ une application bijective. Alors,*

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ et } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B.$$

De plus, f^{-1} est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration. À noter. □

Proposition 65. *Soit $f : A \to B$ une application. Il est équivalent de dire :*

(i) f est bijective, et

(ii) Il existe une application $g : B \to A$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_B.$$

Dans ce cas, il existe une unique application $g : B \to A$ vérifiant les égalités du (ii), qui est l'application f^{-1}.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ainsi, d'après cette proposition, pour démontrer qu'une application $f : A \to B$ est bijective, on peut donner une application $g : B \to A$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_B$$

ce qui démontre la bijectivité de f en déterminant sa bijection réciproque, qui est g.

Exemple 66. Montrons rapidement que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \bar{A} \end{array} \right.$ est bijective.

Exemple 67. Montrons que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$ est bijective, de réciproque donnée par $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Exercice 68. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$.

(*i*) Soit $y \in]-1,1[$. Simplifier $f(\dfrac{y}{1-|y|})$.

(*ii*) En déduire que f est bijective, et déterminer f^{-1}.

3. Autres propriétés liées à la composition

Proposition 69. *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.*

(i) Si g et f sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(ii) Si g et f sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(iii) Si g et f sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 70. Montrer rapidement que $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est bijective de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et déterminer f^{-1}.

Exercice 71. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. Montrer les réciproques partielles suivantes :

(*i*) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

(*ii*) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

(*iii*) Montrer que si $g \circ f$, on ne peut rien conclure de plus que : f est injective et g est surjective. On trouvera un contre exemple.