Chapitre 8 : Asymptotique des suites

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Généralités sur les limites

Le but de ce chapitre est de définir les notions liées à l'asymptotique des suites (l'étude des limites de suites) et de voir les grands théorèmes classiques d'existence de limites.

Alors, si u est une suite réelle, quel sens donner à "la suite u tend vers le réel r"? Comment le formaliser?

Prenons la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ donnée par $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, et admettons la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}.$$

Ainsi par exemple, $u_{10} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!}$ (On rappelle $0! = 1! = 1$).

Écrivons le début du développement décimal de e :

$$\mathrm{e} \simeq 2,718281828459045.$$

Calculons, à l'aide du programme python suivant, quelques termes de u :

```
def Factorielle(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P=P*i
    return(P)

def SuiteU(n):
    u=0
    for k in range(n+1):
        u=u+(1/Factorielle(k))
    return(u)
```

```
>>> SuiteU(1)
2.0
>>> SuiteU(2)
2.5
>>> SuiteU(5)
2.7166666666666663
>>> SuiteU(10)
2.7182818011463845
>>> SuiteU(12)
2.7182818282861687
>>> SuiteU(15)
2.718281828458995
>>> SuiteU(20)
2.7182818284590455
```

On observe le phénomène suivant : les décimales de u_n semblent, au fur et à mesure que n augmente, se stabiliser sur les décimales de e. Cela n'est que de l'observation, et pas une démonstration, mais le phénomène est bien réel. A partir d'un moment, c'est à dire pour n plus grand qu'un certain entier N_0 (qu'on pourrait trouver), tous les développements décimaux des u_n commencent par

$$2,7182.$$

Puis, pour n assez grand, plus grand qu'un certain entier N_1, tous les développement décimaux des u_n commencent par

$$2,718281828.$$

Et on peut continuer comme cela à l'infini : pour n assez grand, les développements décimaux des u_n commencent par

$$2,718281828459045$$

et on pourrait continuer en prenant le développement décimal total de e, c'est à dire "avec n'importe quelle précision".

Alors, comment formaliser "les développements décimaux de u_n et e coïncident jusqu'à la K-ième décimale après la virgule" ?

Dire cela, c'est dire que la soustraction $u_n - \mathrm{e}$ n'a que des chiffres nuls jusqu'à la $K+1$-ième décimale après la virgule. Par exemple, ci-dessus :

$$u_{10} - \mathrm{e} \simeq -0.0000000273...$$

Autrement dit, cela revient à dire :

$$-10^{-K} \leq u_n - \mathrm{e} \leq 10^{-K}.$$

(On pourrait mettre des inégalités strictes, ça ne change pas grand chose pour la fin)
Ce qu'on réécrit immédiatement :

$$|u_n - \mathrm{e}| \leq 10^{-K}.$$

Alors, dire "Pour n plus grand qu'un certain entier N_0, les développements décimaux de u_n et e coïncident jusqu'à la K-ième décimale après la virgule", on peut écrire :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - \mathrm{e}| \leq 10^{-K}.$$

Pour finir, il reste à généraliser un tout petit peu notre "précision". On a ici pensé les choses avec les développements décimaux, mais en fait le rôle du 10^{-K} ci-dessus est juste de mesurer la distance de u_n à e. Ce qui compte, c'est que l'assertion ci-dessus soit vraie pour tout K assez grand. Autrement dit, pour tout réel $\epsilon > 0$, si petit qu'on choisisse de le prendre, on veut que u_n et e soient proches d'au plus ϵ, à partir d'un certain rang. Cela donne la définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon.$$

Pensez la chose comme ça :

- Si $\epsilon > 0$ est fixé, "$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon$" signifie que "$u_n$ est à distance au plus ϵ de e pour tout n plus grand qu'un certain entier N_0". Si vous pensez développement décimal, deux nombres "assez proches" ont un développement décimal commençant "par les mêmes chiffres".
- Dire que u converge vers e, c'est dire que l'énoncé ci-dessus est vrai pour toute précision ϵ (pensée "de plus en plus petite") qu'on pourrait avoir envie de vérifier, donc c'est dire :
- $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - e| \leq \epsilon$.

Enfin, pour les limites infinies, la morale est la même. Dire que u tend vers $+\infty$ par exemple, c'est dire que les termes u_n peuvent être tous rendus aussi grand que voulu à partir d'un certain rang. Cela donne :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > A.$$

1. Définitions

Dans ce chapitre, toutes le suites considérées sont de la forme $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour un certain entier n_0 (pas de suite dont le domaine de définition contient des "trous").

a) Suites admettant une limite finie

Définition 1. Soit u une suite réelle, et l un réel. On dit que u *converge vers* l, ou que u *admet pour limite* l, et on note :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Exemple 2. (i) Montrons que $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[0\to+\infty]{}$.

(ii) Montrons que $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[0\to+\infty]{}$.

Remarque. En pratique, il faut être à l'aise avec les passages courants suivants :

Proposition 3. *Soit u une suite réelle et l un réel. Alors :*

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(ii) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(iii) Par conséquent : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. À noter. ☐

Exemple 4. Montrons que $\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Suite admettant une limite infinie

Définition 5. Soit u une suite réelle.

(i) On dit que u *admet pour limite* $+\infty$, ou que u *tend vers* $+\infty$, et on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n > A.$$

(ii) On dit que u *admet pour limite* $-\infty$, ou que u *tend vers* $-\infty$, et on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n < A.$$

Exemple 6. (i) Montrons que $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) Montrons que $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Premières propriétés des limites

Définition 7. On dit qu'une suite u *converge*, ou *est convergente*, si u admet une limite finie, autrement dit s'il existe un réel l tel que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Dans ce cas, on dit que u *converge vers l*.
Sinon, on dit que u *diverge*. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque. Attention, les notions de convergence et de divergence s'appliquent à un objet de type "suite". Pour dire

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on peut donc dire que $(\dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Autre exemple : $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, vers $+\infty$.

Remarque. Les suites n'admettant pas de limites sont dites divergentes.

Remarque. Étudier la nature d'une suite, c'est déterminer son éventuelle limite ou prouver qu'elle n'en admet pas.

Voici le premier point, trivial mais nécessaire.

Proposition 8. *Toute suite constante converge vers la valeur de cette constance. Autrement dit, pour tout réel c :*

$$c \xrightarrow[n\to+\infty]{} c.$$

Démonstration. À noter. □

On peut également de suite démontrer que :

Proposition 9. *(i) Toute suite convergente est bornée.*

(ii) Toute suite qui diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ est non bornée.

Démonstration. À noter. □

Le premier point crucial est le suivant.

Théorème 10. (Unicité de la limite d'une suite) *La limite d'une suite, si elle existe, est unique. Autrement dit, pour toute suite réelle u et pour tous l et l' éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \text{ et } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l',$$

alors $l = l'$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Notation : Soit u une suite réelle, et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, on dit que l *est la limite de* u et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

D'après le théorème d'unicité ci-dessus, cette terminologie et cette notation sont légitimes.

Attention, la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'est bien définie que si l'on a démontré que u avait une limite (finie ou infinie). **Utiliser cette notation sans connaitre l'existence d'une limite pour u est une faute**.

2. Opérations et limites

a) Additions, multiplications

Proposition 11. *Soient u et v deux suites réelles admettant une limite. Notons*

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ et } l' = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Alors :

(i) Dans les sous-cas du tableau suivant non notés F.I. (pour "forme indéterminée"), la suite $(u_n + v_n)_n$ admet une limite donnée par la valeur indiquée.

	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = -\infty$	$l' = +\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$l = +\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$

(ii) Dans les sous-cas du tableau suivant non notés F.I. (pour "forme indéterminée"), la suite $(u_n v_n)_n$ admet une limite donnée par la valeur indiquée.

	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	$l' = 0$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l' = -\infty$	$l' = +\infty$
$l \in \mathbb{R}_-^*$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l = 0$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$l \in \mathbb{R}_+^*$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$l = -\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

En particulier, si u et v convergent, alors la suite $(u_n v_n)_n$ converge et admet pour limite le produit des limites de u et de v.

Démonstration. Démontrons certains points. □

Remarque. En particulier, en appliquant l'énoncé ci-dessus avec une suite constante $v = (\lambda)_n$, où λ est réel, on peut dans certains cas déduire la limite de $(\lambda u_n)_n$ ou de $(\lambda + u_n)_n$ en fonction de la limite de $(u_n)_n$.

Exemple 12. (i) Déterminons la limite de $(\frac{1}{n^2})_n$.

(ii) Montrons la convergence de $((1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}))_n$.

(iii) Montrons que $(\frac{n+1}{n})_n$ converge et déterminons sa limite.

b) Division

Proposition 13. *Soit u une suite réelle. Supposons tous les termes de u non nuls à partir d'un certain rang (de sorte que $(\frac{1}{u_n})_n$ soit définie à partir d'un certain rang).*
Supposons que u admet une limite, et notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

(i) Si $l \in \mathbb{R}^*$, alors :
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}.$$
(ii) Si $l = -\infty$ ou $l = +\infty$, alors :
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
(iii) Si $l = 0$, on ne peut rien dire en général.

(iv) Si $l = 0$ et si u est (strictement) positive à partir d'un certain rang, alors
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
(v) Si $l = 0$ et si u est (strictement) négative à partir d'un certain rang, alors
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Démonstration. Montrons l'un de ces énoncés. □

Remarque. Cet énoncé permet, avec la règle pour le produit, de traiter des suites données sous la forme d'un quotient $(\frac{v_n}{u_n}{}_n$.

Exemple 14. (i) Quelle est la limite de $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(ii) Montrons l'existence de, et déterminons $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5 - (\frac{1}{2})^n}$.

Plus généralement, ces énoncés permettent déjà d'établir les limites classiques suivantes.

Proposition 15. *Soit k un entier relatif.*

(i) Si $k > 0$, alors $n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) Si $k < 0$, alors $n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(iii) si $k = 0$, alors $(n^k)_n$ est constante de valeur 1 et donc $n^0 = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c) Passage à la limite des inégalités

Proposition 16. *Soient u et v deux suites réelles. On suppose que "$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang", c'est à dire :*
$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq v_n.$$
Si le suites u et v convergent, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque. Attention, cet énoncé ne s'applique que pour des suites convergentes, c'est-à-dire avec une limite *finie*. On verra plus tard un théorème dit "de comparaison" pour aller plus loin.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Attention, l'énoncé similaire où l'on a pris des inégalité strictes **est faux**. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} < 1$$

mais

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 = \lim_{n \to +\infty} 1.$$

Exemple 17. Montrons que pour tout réel x :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, x < 1 + \frac{1}{n}) \implies x \leq 1.$$

Exercice : en déduire $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}[= [0, 1]$

d) Composition

Cet énoncé est un avant goût d'un résultat lié à la continuité des fonctions. Plus tard, on dira que les fonctions exponentielle, logarithme et racine carrée sont continues. Pour l'instant :

Proposition 18. *Soit u une suite réelle. Supposons que u admette une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

(i) Si $l \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^l.$$

Si de plus $l \geq 0$ et u est positive à partir d'un certain rang :

$$\sqrt{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{l}.$$

Enfin, si $l > 0$ alors u est strictement positive à partir d'un certain rang et :

$$\ln(l) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(l).$$

(ii) Si $l = +\infty$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang et :

$$\mathrm{e}^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ et } \sqrt{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

(iii) Si $l = -\infty$, alors $\mathrm{e}^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Démonstration. Résultat admis (nécessite la continuité). □

Exemple 19. Déterminons, sous réserve d'existence :

(i) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 - n + 1}$.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2 + \frac{1}{n}}$.

Exercice 20. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{\ln(n^2) + 1}{1 - \frac{1}{3^n}} \right)_{n \geq 1}$.

Plus généralement, en conséquence de cette proposition, on peut composer par une fonction puissance généralisée.

Proposition 21. *Soit $\alpha > 0$ un réel, et u une suite réelle strictement positive à partir d'un certain rang.*
Si u admet une limite finie l, alors $l \geq 0$ et :

$$u_n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} l^\alpha$$

où l'on a posé $0^\alpha = 0$.
Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Une suite positive à partir d'un certain rang ne peut pas tendre vers un réel strictement négatif, ou $-\infty$, comme on peut le voir par passage à la limite des inégalités.

Exercice 22. Démontrer la remarque ci-dessus.

Remarque. On peut, à l'aide de cette dernière proposition, également déterminer (sous réserve d'existence) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^\alpha$ à partir de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ **pour** $\alpha < 0$ en écrivant pour tout n convenable : $u_n^\alpha = \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ (utiliser la proposition précédente, et la proposition concernant le passage à l'inverse).

II. Limites classiques, formes indéterminées.

1. Puissances

On a déjà vu les limites des suites de la forme $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque k est un entier relatif. On généralise cela facilement pour les puissances généralisées.

Proposition 23. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,*

$$n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \text{ et } \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 24. $n^{\frac{7}{8}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Il faut être à l'aise avec cette proposition, par exemple pour les passages comme :
$\dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et $n^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

2. Logarithme, exponentielle

On l'a en fait déjà vu dans la proposition sur la composition :

Proposition 25. *$e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*

3. Suites géométriques

Proposition 26. *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

(i) Si $|q| < 1$, alors $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(ii) Si $q > 1$, alors $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

(iii) Si $q = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = 1$ donc $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

(iv) Si $q \leq -1$, alors $(q^n)_n$ n'admet pas de limite.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Nous démontrerons plus tard le dernier point pour illustrer une méthode.

Exemple 27. Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^k$.

4. Le théorème de croissance comparée

Le théorème ci-dessous permet de lever certaines formes indéterminées.

Ce théorème admis permet de "comparer" les croissances des suites exponentielles (on retrouve exactement les suites géométriques), des suites logarithmiques, et des suites définies à l'aide d'une puissance de n (on parlera de croissance "polynômiale").

Penser : Croissance logarithmique $<$ croissance polynômiale $<$ croissance exponentielle.

Mais pour écrire quelque chose de correcte, vous ne pouvez qu'appliquer le :

Théorème 28. (de croissance comparée). *Soient α, β et γ trois réels strictement positifs. Alors :*

(i) $\frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\frac{n^\beta}{\ln(n)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) $\frac{n^\beta}{(\mathrm{e}^n)\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\frac{(\mathrm{e}^n)\gamma}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Faisable, un peu longue, et admise par le programme officiel. □

Remarque. Attention, ce théorème intervient très souvent, sous plusieurs variantes. Il faut être à l'aise avec!

Remarque. Si vous aimez les proverbes :

- (i) : "la croissance polynômiale impose sa limite sur la croissance logarithmique"
- (ii) : "La croissance exponentielle (ou géométrique, voir ci-dessous) impose sa limite sur la croissance polynômiale".

Remarque. Ces énoncés, donnés par 2, se répètent : on passe de l'un à l'autre par passage à l'inverse.

Remarque. On parle plutôt de croissance géométrique que de croissance exponentielle, car à partir du cas (ii), on peut lever des indéterminations comme pour l'étude de la limite de $(\frac{n^2}{3^n})_n$. Voici ce que cela donne :

Proposition 29. *Soit $\alpha > 0$ et $q > 1$. Alors,*

$$\frac{n^\alpha}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \frac{q^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 30. Levons les formes indéterminées apparaissant dans l'étude de la limite de la suite de terme général u_n donné par :

- (i) $\frac{n^5}{3\ln(n)}$.
- (ii) $0,5^n n$.
- (iii) $\frac{e^{2n}}{n\sqrt{n}}$.

Attention à bien appliquer ce théorème et sa conclusion ci-dessus.

Remarque. Et, peut on dire, en conséquence, que "croissance logarithmique < croissance exponentielle"? La réponse est oui :

Exemple 31. Montrons l'existence de $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^3}{e^n}$ et calculons cette limite.

Vous pourrez utiliser cette conséquence:

Proposition 32. *Soient α, β des réels strictement positifs. Alors,*

$$\frac{\ln(n)^\alpha}{(e^n)^\beta} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ et } \frac{(e^n)^\beta}{\ln(n)^\alpha} \xrightarrow[+ \to +\infty]{} \infty.$$

Démonstration. Un cas à noter. □

5. Levée des formes indéterminées : un principe général

Voici deux techniques classiques pour lever des formes indéterminées.

a) À utiliser très souvent : la factorisation

Cette méthode a un aspect théorique en 2e année avec la notion de *suites équivalentes.* En pratique, cela reviendra à faire les opérations suggérées par les idées ci-dessous.

Méthode (idée de méthode) :

(i) Pour lever une forme indéterminée dans une somme, on identifie le terme "imposant sa croissance aux autres" (ou "le plus grand") et on factorise par celui-ci. On conclut alors par croissance comparée.

(ii) Dans un quotient/un produit de telles sommes, la première étape permet souvent de conclure par croissance comparée.

Exemple 33. (i) Cherchons la limite de la suite u donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n^5 - 8n - 1$.

(ii) Même question pour $u_n = n^2 - 3\ln(n)$, puis pour $v_n = n^5 - \ln(n) - 2^n$.

(iii) Même question pour $u_n = \frac{2^n + 3^n - n}{5^n + \ln(n)}$.

Remarque. Vous avez bien appliqué la première étape si vous remarquez une "parenthèse qui tend vers 1".

Exercice 34. Déterminer la limite de $\frac{5^n + e^n - n}{n\ln(n) + n^2 - n}$ lorsque $n \to +\infty$.

b) Pour gérer des racines carrées, la quantité conjuguée

En plus de la quantité conjuguée, la méthode décrite ci-dessus doit être toujours en tête.

Exemple 35. Déterminer les limites des suites de terme général u_n donné par :

(i) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(ii) $u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}$.

III. Théorèmes d'existence de limites

1. Le théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes

Théorème 36. (des gendarmes) *Soient u, v et w trois suites réelles. On suppose :*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, v_n \leq u_n \leq w_n$$

On suppose de plus que v et w convergent vers un même réel l.
Alors, u converge vers l.

Démonstration. À noter. □

Exemple 37. Déterminons la limite des suites u données par :

(*i*) $u_n = \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}$.

(*ii*) $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$. On utilisera l'inégalité suivante, démontrée à l'aide d'une étude de fonction classique :

$$\forall x > -1, \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Un corollaire classique :

Proposition 38. *Soit u une suite bornée, et v une suite telle que*

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors,

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Ce résultat est à la limite du programme : vous devez refaire sa démonstration pour l'utiliser (éventuellement avec les données de l'exercice).

Voici une version similaire pour les limites infinies :

Théorème 39. (de comparaison) *Soient u et v deux suites telle que :*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \leq v_n.$$

Alors :

(*i*) *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

(*ii*) *Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.*

Démonstration. À noter. □

Exemple 40. Montrons que $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple 41. classique chez les classiques

(*i*) Montrer que $\forall n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$.

(*ii*) En déduire la limite classique à connaitre :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

2. Le théorème de la limite monotone

Théorème 42. (de la limite monotone) *Soit u une suite réelle.*

(i) Supposons u croissante. Alors:

(a) u converge si et seulement si u est majorée (si et seulement si elle est bornée). Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

(b) Si u n'est pas majorée, alors u diverge vers $+\infty$.

(ii) Supposons u décroissante. Alors:

(a) u converge si et seulement si u est minorée (si et seulement si elle est bornée). Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} u_n \leq u_n.$$

(b) Si u n'est pas minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. À noter, en admettant l'existence d'un plus petit majorant de u pour le premier cas.
□

Exemple 43. (classique)

(i) Montrer $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

(ii) Faire apparaître une somme télescopique dans le membre de droite. Qu'en déduire?

(iii) En déduire que la suite u donnée par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (pour $n \geq 1$) converge.

Culture générale : cette limite vaut $\frac{\pi^2}{6}$, et les démonstrations de ce résultat ne sont pas simples.

3. Le théorème des suites adjacentes

Définition 44. On dit que deux suites réelles u et v sont *adjacentes* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) u est croissante et v est décroissante, ou l'inverse v croissante et u décroissante,

(ii) $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Montrer que deux suites sont adjacentes permet de montrer leurs convergences.

Théorème 45. *Soient u et v deux suites telles que :*

(i) u est croissante, v est décroissante, et

(ii) $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Alors, u et v sont convergentes de même limite, et si l'on note l cette limite commune :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n.$$

Remarque. Si les suites u et v sont indexées par autre chose que $\mathbb{N}$, on adapte juste le dernier point du théorème.

Démonstration. À noter. □

Exemple 46. Posons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrons que u et v convergent.

4. Utilisation des sous-suites de rangs pairs et impairs

Voilà enfin une proposition permettant de ramener l'étude asymptotique d'une suite u à l'étude des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Ce sont les suites obtenues en ne gardant qu'un terme sur deux de la suite u.

Théorème 47. *Soit u une suite réelle, et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Posons, pour tout entier n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *et*

(ii) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ *et* $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Autrement dit, u converge vers l ssi les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.

Démonstration. À noter si le temps le permet. □

Très souvent, on utilise ce théorème pour démontrer l'existence d'une limite à l'aide au théorème des suites adjacentes. On montre alors que les sous-suites de rang pairs et impairs sont adjacentes.

Exemple 48. Montrons, à l'aide de ce théorème, que la suite u donnée par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

On peut aussi utiliser ce théorème pour montrer rapidement que certaines suites n'ont pas de limites.

Exemple 49. Montrons que si $q \leq -1$, alors $(q^n)_n$ n'admet pas de limite.