Lycée Hoche
ECG1 A

2023-2024
Mathématiques

TD de mathématiques n°8 : Asymptotique des suites

Pour commencer

Calculs de limites de formules explicites

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il y a ou non une forme indéterminée puis déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (toute utilisation d'un théorème de croissance comparée devra être explicitement mentionnée) :

1) $n^2 - n - 1$
2) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$
3) $n^3 + 2n^2 + 3n + 4$
4) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
5) $n^3 - 2n^2 + 3n + 4$
6) $n + \sqrt{n^2+n}$
7) $n^4 + n^2 - \left(n^3 + n\right)$
8) $n - \sqrt{n^2-n}$
9) $(1-n)(n-1)$
10) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$
11) $n(n-1)(n+1) - n^3$
12) $\frac{n+1}{n}$
13) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$
14) $\frac{n}{n+1}$
15) $1 - \frac{n}{n+1}$
16) $\sqrt{n+\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n-1}}$
17) $n - \frac{n}{n+1}$
18) $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$
19) $e^{1+\ln n}$
20) $n - \frac{n^2}{n+1}$
21) $e^{1-\ln n}$
22) $\frac{n^2-n-1}{n^2+n+1}$
23) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
24) $\frac{-n^3+n+1}{n^2+1}$
25) $\ln\left(\frac{1}{n}\right) - n$
26) $\frac{3n^3+2n^2-1}{4n^3-n+3}$
27) $\ln n - \frac{1}{n}$
28) $\frac{n^2+2n+1}{3n^3-5n+6}$
29) $n + \ln\left(n^2-1\right)$
30) $\ln\left(n^2+1\right) - \ln n$
31) $\frac{(n-1)(n+1)}{(n-2)(n+2)}$
32) $\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln n$
33) $n\sqrt{n} - n - 2\sqrt{n} + 1.$
34) $\frac{n^2-n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-n}$
35) $\ln\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$
36) $3 + 2\times 3^n$
37) $3\times 2^n - 2\times 3^n$
38) $\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(9-\frac{1}{n}\right)}$
39) $2^n - 3^n + 4^n$
40) $\sqrt{1+\frac{3n+1}{n+1}}$
41) $3^n + (-2)^n - 5^n$
42) $\sqrt{n - \frac{n^2}{n+1}}$
43) $5\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{5}\times 2^n$
44) $5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$
45) $e^n - n^e$
46) $e^{n+\ln n}$
47) $e^{n-\ln n}$
48) $\frac{5^n-3^n}{2^n-1}$
49) $\ln\left(\frac{1}{n}\right) + n$
50) $\frac{2^n-3^n}{2^{-n}+3^{-n}}$
51) $n - \ln\left(n^2-1\right)$
52) $e^{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$
53) $\frac{2\times 3^n+2^n}{5\times 3^n-2^n}$
54) $2^n - n^2$
55) $\frac{e^{2n}-e^n}{e^{2n}+e^n}$
56) $e^n - \ln n$
57) $\frac{e^{-n}}{n^e}$
58) $\frac{e^n}{n^2+1}$
59) $\ln(n+1) - n$
60) $e^{-n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

Limites et inégalités

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > -a$, on pose $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *On pourra utiliser un encadrement du logarithme, ou démontrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\ln(1+\frac{a}{n})) = a$ *en reconnaissant un taux de variation.*

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq v_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ et $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq w_n$.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{a^n}$.

(a) On suppose que $a \leq 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) On suppose que $a > 1$.

(i) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(ii) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.

(iii) En déduire que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Limites et monotonie

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Indication : on pourra étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9 Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+a^k\right)$.

(a) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

(b) On suppose que $a = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(c) On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

(d) On suppose que $a < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Études de suites récurrentes

Exercice 10 On considère la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n(1-u_n)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n(1+u_n)$$

(a) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n^2\right)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(d) Écrire un code Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (sans utiliser sqrt bien sûr).

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1$.

(a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell + 1 = \frac{\ell+1}{\sqrt{\ell^2+1}}$.

En déduire que $\ell \in \{-1, 0\}$.

(b) On suppose que $u_0 < -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < -1$.

Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(c) On suppose que $u_0 \in]-1, 0[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]-1, 0[$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(d) On suppose que $u_0 > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Termes de rangs pairs et impairs

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour continuer

Exercice 16 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Exercice 17 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Culture générale : La limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée constante d'Euler, se note γ et vaut approximativement 0,577 .

Exercice 18 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 19 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 20 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^3 - 2}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{(v_n)^3 - 2}{3}$$

(a) (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 0]$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq 2$.

(b) (i) Factoriser le plus possible le polynôme $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

(ii) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) (i) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dorénavant, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(ii) Déterminer la valeur de ℓ.

(d) (i) Montrer en raisonnant par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(ii) Proposer un code Python permettant d'afficher la valeur du plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \geq 10^{20}$.

Exercice 21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 + 2\sqrt{u_n - 3}$.

(a) On suppose que $u_0 = 8$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) On suppose que $u_0 = 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $4 \leq u_n \leq 7$.

Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 22 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 23 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.