Programme de colle n^o 9 : Ensembles et applications (fin). Asymptotique des suites (cours seulement).

*Semaine du lundi **27 novembre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Fin de la partie sur les applications.

9.1 Applications surjectives : définition. Pour déterminer si une application est injective, il suffit de déterminer son ensemble image.

9.2 Applications bijective : définition. Notion d'image réciproque. Bijection réciproque d'une application bijective. $f : A \to B$ est bijective ssi il existe $g : B \to A$ tel que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $f(a) = b \iff g(b) = a$. Applications induisant une bijection.

9.3 Relation de composition vérifiée par la réciproque d'une application bijective. Si f est bijective, alors f^{-1} aussi et f^{-1} admet pour réciproque f. Caractérisation de la bijectivité utilisant la composition (prop. 65). Lorsque $g \circ f$ est bien définie : Si g et f sont injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective). Si g et f sont bijectives, alors $g \circ f$ aussi, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Asymptotique des suites (tout début)

9.4 Définitions : Limite finie d'une suite, limite infinie d'une suite. Équivalences pour l réel :

- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Notions de suites convergentes ou divergentes. Toute suite constante converge (vers la valeur de cette constante). Toute suite convergente est bornée, toute suite de limite $+\infty$ ou $-\infty$ est non bornée.

Quelques questions de cours

1. On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3) | t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.
2. Définir la notion d'ensemble image. Définir avec des énoncés quantifiés, les notions d'applications injectives, surjectives et bijectives. L'interrogateur demandera de nombreux exemples, dans des contextes variés.
3. Montrer que $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ est bijective et donner sa réciproque.
4. Énoncer et démontrer la proposition (65) caractérisant les applications bijectives à l'aide de la composition.
5. Énoncer et démontrer la proposition (69) donnant des résultats de stabilité par composition des notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité.
6. Montrer que $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.
7. Soit u une suite réelle et l un réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$. Définir $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Montrer que $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
8. Énoncer et démontrer la proposition (9) reliant la notion de suite bornée aux notions de limite.
9. Écrire une fonction Python prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie la liste `[`$u_0, u_1, \dots, u_{\mathtt{n}}$`]` où u est l'unique suite vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2^n u_n - u_{n+1}$.