Lycée Hoche
ECG1 A

2023-2024
Mathématiques

Devoir surveillé numéro 2

Devoir du 24 novembre 2023.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit. Le soin de la copie et la qualité de la rédaction seront pris en compte de manière importante dans la notation. Les résultats démontrés non encadrés pourront être ignorés par le correcteur. On rappelle que la qualité de l'argumentation et la rigueur (donc le soin accordé aux détails) sont au cœur des mathématiques. Sauf mention explicite du contraire, tout résultat demandé doit être démontré.

Bon courage à toutes et à tous!

Exercice 1 *Proches du cours. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. Soit f une fonction réelle, D_f son domaine de définition et I une partie de $\mathbb{R}$.
   (a) Que signifie "f est définie sur I" ?
   (b) Que signifie "f est strictement croissante sur I" ?
   (c) Soit $x_0 \in D_f$. Que signifie "f admet un maximum en x_0"? Dans ce cas, qu'appelle-t-on "le maximum de f"?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, u_n = 0$.
3. Soit n_0 un entier, et $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Après avoir rappelé ce que signifie "u est croissante", montrer par récurrence que si u est croissante alors :
$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}.$$
4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 5$, $u_1 = 7$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 10u_{n+2} = 13u_{n+1} - 3u_n.$$
   Que dire de la suite u? Exprimer u_n en fonction de n.
5. Soient P et Q deux polynômes. Énoncer sans démonstration la proposition donnant le degré de $P+Q$ en fonction des degrés de P et Q.
6. Soit P un polynôme réel et r un réel. Montrer que r est racine de P si et seulement si $X - r$ divise P.
7. Résoudre l'équation (S) d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donnée par :
$$(S)\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 + z \\ x - y - 1 = z \\ 2x + 2z = y - 2 \end{cases}.$$
8. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Définir $A \cup B$ à l'aide d'une égalité.
9. On considère une liste `L` en python. Donner la commande renvoyant le nombre d'éléments de `L`. Donner la commande permettant d'ajouter un objet `a` à la liste `L`. Que renvoie `L[-1]` ? (On n'oubliera pas que `L` pourrait être vide).
10. Définir en python une liste `L` formée par les carrés des entiers de $[\![1, 10^7]\!]$ dans l'ordre croissant, en une ligne de code. *Vous pouvez sinon répondre en un maximum de 3 lignes de code, perdant ainsi 2 points sur 4 à cette question.*

Exercice 2 *Quelques méthodes de calcul. Les questions numérotées par des entiers sont indépendantes.*

1. On pose $P(X) = X^4 - \frac{9}{4}X^3 + \frac{13}{8}X^2 - \frac{3}{8}X \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Déterminer deux racines de P.
   (b) Factoriser P au maximum.
   (c) Résoudre l'inéquation $P(x) > 0$ d'inconnue réelle x.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer et simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4 \times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}$.
4. (a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = m$ d'inconnue réelle x.
   (b) Que dire de l'injectivité de $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$? De son ensemble image?
5. Soit m un réel. Résoudre le système linéaire (S) donné par :
$$\begin{cases} x - my + z = 0 \\ mx - y = 2 \\ x + y - mz = 1 \end{cases}.$$
6. On pose $f : x \mapsto x - \sqrt{x} + 1$. *L'utilisation de tableaux de variations est interdite dans toutes ces sous questions.*
   (a) Quel est le domaine de définition D_f de f?
   (b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - X + 1 - y$, en fonction de y.
   (c) Montrer que $f(D_f) \subset [\frac{3}{4}, +\infty[$.
   (d) Soit $y \in [\frac{3}{4}, +\infty[$. Donner un antécédent de y par f.
   (e) Déterminer l'ensemble image $f(D_f)$.
   (f) f est-elle injective?

Exercice 3 *Une suite dite homographique.*

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}.$$

1. Écrire une fonction Python d'entête `def SuiteU(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.
2. Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et vérifie $0 \leq u_n < 1$.
3. En déduire le sens de variation de la suite u.

Dans la suite, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout entier n.

4. Montrer que v_n est bien défini pour tout entier n, et que $v_n \neq 0$..
5. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
6. En déduire une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\dfrac{x-1}{x+1} = y$ d'inconnue réelle x.

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4
On considère la fonction $f : x \mapsto (x + \ln(x))e^{x-1}$.

Étude de f. Les limites ne sont pas demandées dans les tableaux de variation.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x}$.

3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$.

4. Déterminer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f.

5. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite réelle u donnée par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n \geq 2$.

7. (*a*) Écrire une fonction Python d'entête `def f(x):` prenant en entrée un nombre `x`, et renvoyant en sortie la valeur de f(`x`) si f est définie en `x`, affichant la chaîne de caractère "hors domaine" sinon (sans rien renvoyer dans ce cas).

   (*b*) En déduire une fonction `SuiteU` prenant en entrée un entier naturel `n` et renvoyant la valeur $u_{\texttt{n}}$.

8. Montrer que u est croissante.

9. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \mathrm{e}^n$.

10. En déduire l'existence d'un entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

11. À l'aide d'une boucle `while`, écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

Exercice 5 *Autour des listes en Python*

1. Que renvoie la fonction `Mystere` suivante, prenant en entrée une liste de nombres `L` ?

```
def Mystere(L):
        for i in range(len(L)-1):
                if L[i]<L[i+1]:
                        return(False)
        return(True)
```

2. Écrire une fonction Python d'entête `def SommeCarres(L) :` prenant en entrée une liste de nombres `L` et renvoyant en sortie la somme des carrés des entrées de `L`.
   Par exemple, `Somme([2,3,4])` doit renvoyer 29.

3. On dit ici qu'une liste est *symétrique* si sa lecture dans l'ordre inverse donne la même liste. Par exemple, `[2,"a",1,"a",2]` est symétrique, mais pas `[2,3,1,2,3]`.

   Écrire une fonction `estSymetrique` prenant en entrée une liste `L` et renvoyant `True` si celle-ci est symétrique, et `False` sinon.

4. On appelle ici *symétrisée d'une liste* `L` la liste formée consécutivement de la liste `L` puis de la liste `L` lue dans l'ordre inverse. Par exemple, la symétrisée de `[2,3,1]` est la liste symétrique `[2,3,1,1,3,2]`.

   Écrire une fonction `Symetrisee` prenant en entrée une liste `L` et renvoyant en sortie la symétrisée de `L`. Cette fonction ne devra pas modifier son argument `L` (sinon, -1 point sur 4).

Exercice 6
Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\exists!(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$

On fixe donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et on cherche à démontrer la proposition ci-dessus.

On va démontrer ce résultat de deux manières différentes. Les réponses à la seconde partie ne devront donc pas utiliser les résultats de la première.

Méthode 1 : Par une résolution directe.

$P \in \mathbb{R}_2[X]$ donc il existe d'uniques réels a, b, c tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$.

1. Montrer
$$\exists!(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2)$$
et exprimer l'unique triplet (λ, μ, γ) solution de ce problème en fonction de a, b et c.

Méthode 2 : Par analyse-synthèse.

2. **Analyse :** Dans cette question, on suppose l'existence de réels λ, μ, γ tels que :
$$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$
Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}P(2)$, $\mu = -P(1)$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}P(0)$. Qu'en déduire par rapport à l'énoncé recherché?

3. **Synthèse :** On pose $\lambda = \frac{1}{2}P(2)$, $\mu = -P(1)$ et $\gamma = \dfrac{1}{2}P(0)$, puis :
$$Q(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2).$$
   (a) Montrer : $\forall i \in \{0, 1, 2\}, P(i) = Q(i)$.
   (b) En déduire que $P = Q$.
   (c) Conclure la démonstration du résultat recherché.

— Fin de l'énoncé —