Lycée Hoche
ECG1A

2023-2024
Mathématiques

Correction : Interro n°4

Interro du 16 novembre

Exercice 1

1. Vérifions :

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 + 2\sqrt{2}^3 - 17\sqrt{2}^2 - 4\sqrt{2} + 30 = 4 + 4\sqrt{2} - 34 - 4\sqrt{2} + 30 = 0$$

   et un calcul similaire (à faire sur la copie) montre que $-\sqrt{2}$ est racine de P.

   Par conséquent, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines **distinctes** de P. **Par théorème**, le polynôme

$$Q(X) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) = X^2 - 2$$

   divise P.

2. En posant la division euclidienne de P par $X^2 - 2$ (la poser), on trouve un reste nul (comme prouvé dans la question précédente), et le quotient est $X^2 + 2X - 15$. Autrement dit, l'égalité de division euclidienne s'écrit :

$$P(X) = (X^2 - 2)(X^2 + 2X - 15).$$

   On factorise $X^2 + 2X - 15$ en calculant son discriminant (64) puis ses racines (on trouve -5 et 3) (le faire proprement sur copie). Finalement, la factorisation maximale de P recherchée est :

$$P(X) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X + 5)(X - 3).$$

3. On dresse un tableau de signe avec, comme lignes, les 4 facteurs de P trouvés ($X - \sqrt{2}$, $X + \sqrt{2}$, $X - 3$ et $X + 5$ - on peut donner le signe de ces fonctions affines sans justification) puis P. On trouve que l'ensemble des réels x tels que $P(x) \geq 0$ est :

$$[-5, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3].$$

Exercice 2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. (a, b, c) est solution du problème posé ssi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x^3 - x^2) + b(x^2 - x) + c(x^3 - x) = x^3 + x^2 + x.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, a(x^3 - x^2) + b(x^2 - x) + c(x^3 - x) = x^3 + x^2 + x \\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}, (a + c)x^3 + (-a + b)x^2 + (-b - c)x = x^3 + x^2 + x \\
\overset{(1)}{\iff} &\begin{cases} a + c = 1 \\ -a + b = 1 \\ -b - c = 1 \end{cases} \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} &\begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 2 \\ -b - c = 1 \end{cases} \\
\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} &\begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(1) : Par théorème d'identification des coefficients, deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients de même degré sont égaux.

Le système obtenu est incompatible, donc il n'existe pas de réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x^3 - x^2) + b(x^2 - x) + c(x^3 - x) = x^3 + x^2 + x.$$

— *Fin du corrigé* —