Programme de colle n^o 10 : Asymptotique des suites

Semaine du lundi 4 ***décembre****.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les limites de suites

10.1 Toute suite convergente est bornée. Toute suite qui diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ est non bornée. Unicité de la limite.

10.2 Opérations et limites : addition, multiplication, division. Passage à la limite des inégalités. Composition par les fonctions : exponentielle, racine carrée, logarithme et puissances généralisées.

10.3 Limites classiques : limites de n^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), de e^n, de $\ln(n)$, limites des suites géométriques.

10.4 Le théorème de croissance comparée. Conséquences : limites de $\dfrac{n^\alpha}{q^n}$, de $\dfrac{\ln(n)^\alpha}{(e^n)^\beta}$ (et des inverses). Levée des formes indéterminées par factorisation.

Théorèmes d'existence de limites

10.5 Le théorème des gendarmes. Application : si v tend vers 0 et u est une suite bornée, alors $(u_nv_n)_n$ tend vers 0. Théorème de comparaison.

10.6 Le théorème de la limite monotone.

Quelques questions de cours

1. Donner les définitions portant sur : les notions de limites (finies ou infinies) d'une suite, la notion de suite convergente, de suite divergente. Puis, donner le tableau donnant l'éventuelle limite de la suite $(u_nv_n)_n$ en fonction des éventuelles limites de u et v.
2. Montrer que toute suite convergente est bornée.
3. Énoncer le théorème de passage à la limite des inégalités, et le démontrer.
4. Énoncer la proposition donnant les limites des suites géométriques. Le démontrer dans le cas où la raison q vérifie $|q| < 1$.
5. Énoncer le théorème de croissance comparée. Déterminer l'éventuelle limite de $\dfrac{n^4 - \ln(n) + 1}{n - 2^n}$ (toute variante aussi simple est possible).
6. Énoncer le théorème des gendarmes et le démontrer.
7. Énoncer le théorème de comparaison et le démontrer.
8. Énoncer le théorème de la limite monotone. Le démontrer pour une suite croissante. On admettra que toute suite bornée admet un plus petit majorant.
9. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$. En déduire la limite de u_n.
10. Expliquer le principe du tri à bulles, et l'implémenter en une fonction Python d'entête `def TriBulles(L):`.