Chapitre 9 : Ensembles finis, dénombrement

ECG1 A, Lycée Hoche

Dénombrer, c'est compter le nombre de possibilités d'un phénomène. Par exemple, on peut compter

- Le nombre de lancers différents d'une paire de dés à 6 faces dont la somme fait 7,
- Le nombre de mains de 5 cartes (dans un jeu classique de 52) formant un carré,
- Le nombre d'anagrammes du mot "CLASSIQUE".

Pour cela, on s'appuie sur la théorie des ensembles finis.

I. Ensembles finis

1. Ensembles finis, cardinal

Définition 1. On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on appelle *cardinal* de E, et on note $\mathrm{Card}(E)$, le nombre d'éléments qu'il contient.

Remarque. On trouve aussi parfois la notation $|E| = \mathrm{Card}(E)$.

Exemple 2. (*i*) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont infinis (ce ne sont pas des ensembles finis).

(*ii*) L'ensemble $E = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ est fini, et $\mathrm{Card}(E) = 5$.

(*iii*) Les répétitions d'éléments, dans une description en extension, n'apportent rien :

$$\mathrm{Card}(\{1, 2, 3, 4, 3, 4\}) = 4.$$

Remarque. Comme le montre l'exemple ci-dessus, il faut faire attention. Si $x_1, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des éléments d'un ensemble E tel que :

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

alors E n'est pas automatiquement de cardinal n. Il faut pour cela que les x_i soient deux à deux distincts. Autrement dit, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\mathrm{Card}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = n$

(*ii*) $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies x_i \neq x_j$.

Un autre exemple, n'oubliez pas :

Proposition 3. *Soient n et p deux entiers tels que $p \leq n$. Alors :*

$$\mathrm{Card}\left([\![p, n]\!]\right) = n - p + 1.$$

Voici les premières propriétés du cardinal.

Proposition 4. *Soit E un ensemble fini. Alors :*

(i) Toute partie A de E est finie, et $\mathrm{Card}(A) \leq Card(E)$.

(ii) Pour tout ensemble A:

$$\begin{cases} A \subset E \\ \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \end{cases} \iff A = E.$$

(iii) Pour toute partie A de E :

$$\mathrm{Card}(\bar{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Démonstration. Admise, le sens est intuitif. □

Remarque. Le point (ii) de la proposition ci-dessus donne une autre manière de démontrer une égalité d'ensembles $A = E$ lorsque E est un ensemble fini. Il suffit de montrer que A est une partie de E, puis $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$. Autrement dit, le test de cardinal peut remplacer la vérification de l'autre inclusion à considérer pour montrer $A = E$.

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.

On se sert souvent du point (iii) en dénombrement. On dit qu'on raisonne par passage au complémentaire.

Par exemple, on lance successivement deux dés classiques à 6 faces, et on cherche le nombre de résultats possibles pour que les dés ne tombent pas sur la même face. Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ l'ensemble des résultats possibles pour ce tirage de 2 dés, et $B \subset \Omega$ l'ensemble des résultats n'amenant pas deux fois la même face.
Il y a 6 résultats possibles pour lesquels les dés font la même face $((1, 1), ..., (6, 6))$ donc $\mathrm{Card}(\bar{B}) = 6$.

Par complémentaire :

$$\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(\bar{B}) = 36 - 6 = 30.$$

Enfin, le principe suivant est essentiel en dénombrement.

Proposition 5. *Soient E et F deux ensembles. On suppose que E est finie. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) Il existe une bijection $E \to F$, et

(ii) F est fini, et $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Démonstration. Dessin à noter. □

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.

On se sert de ce principe tout le temps en dénombrement, souvent sans même le mentionner. Et c'est le point clé d'exercices plus abstraits. Exemples à suivre.

2. Cardinal et réunion disjointe

Définition 6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On dit que A et B sont des ensembles *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
Dans ce cas, on dit aussi que la réunion $A \cup B$ est une réunion *disjointe*.

Proposition 7. *Soit E un ensemble fini. Soient A et B deux parties de E.*
Si A et B sont disjoints, alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Autrement dit, le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis est la somme de leurs cardinaux.

Démonstration. Dessin à noter. □

Remarque. Il est clairement nécessaire que la réunion soit disjointe. Par exemple, si on prends $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $a \cup B = \{1, 2, 3\}$ est de cardinal 3, mais A et B sont de cardinal 2. L'égalité

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

est donc fausse dans ce cas.

Proposition 8. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que ces parties sont deux à deux disjointes :*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Alors,

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \ldots + \mathrm{Card}(A_n).$$

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.

Pour dénombrer un ensemble de possibilités, on peut les classer dans des sous-cas *disjoints*, calculer le cardinal de ces sous-cas, puis les sommer.

Exemple 9. On lance successivement deux dés à 6 faces classiques, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Quel est le nombre de résultats possibles comportant exactement une fois la face 1?

Rédaction attendue :

Soit C l'ensemble des résultats comportant exactement une face 1.
Pour construire un élément de C, il y a deux possibilités **disjointes**:
1e cas : Le premier dé fait 1. Dans ce cas, le second dé a 5 valeurs possibles, de 2 à 6. Il y a donc 5 résultats possibles dans ce cas.
2e cas : Sinon, le second dé fait 1. Dans ce cas, le premier dé a également 5 valeurs possibles, et il y a donc 5 résultats possibles dans ce cas.

Les deux possibilités sont bien disjointes, car les résultats de C comportent exactement une face 1, donc :

$$\mathrm{Card}(C) = 5 + 5 = 10.$$

Il y a 10 résultats comportant exactement une fois la face 1.

Rédaction plus théorique :

On cherche donc le cardinal de l'ensemble C des paires $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$ contenant exactement une coordonnée égale à 1.

Notons $C_1 = \{1\} \times [\![2, 6]\!]$ et $C_2 = [\![2, 6]\!] \times \{1\}$.
Alors, $C = C_1 \cup C_2$ et cette réunion est disjointe (1), donc par théorème :

$$\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(C_1) + \mathrm{Card}(C_2).$$

De plus, l'application suivante est bijective :

$$\left| \begin{array}{ccc} C_1 & \longrightarrow & [\![2, 6]\!] \\ (i, j) & \longmapsto & j \end{array} \right.$$

donc $\mathrm{Card}(C_1) = \mathrm{Card}([\![2, 6]\!] = 5$. De même, $\mathrm{Card}(C_2) = 5$ et finalement :

$$\mathrm{Card}(C) = 10.$$

(1) : Soit $x \in C_1$, soit $j \in [\![2, 6]\!]$ tel que $x = (1, j)$. Si on avait $x \in C_2$, on aurait $1 \in [\![2, 6]\!]$ ce qui est absurde. Donc $x \notin C_2$. Ceci montre $C_1 \subset \bar{C_2}$, donc $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

3. Cardinal et réunions

Pour les réunions non disjointes, le tableau est plus compliqué.

Proposition 10. *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,*

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration. À noter. □

On peut appliquer cette formule pour, dans une récurrence, en déduire des formules plus compliquées.

Proposition 11. (Formule dite "du Crible") *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble fini E. Alors,*

$$\begin{aligned} Card(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) \\ &\quad + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Démonstration. À noter. □

4. Cardinal et produit cartésien

Proposition 12. *(i) Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est fini, et*

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F).$$

(ii) Soient $E_1, \dots E_n$ des ensembles finis (où $n \in \mathbb{N}^*$). Alors, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est fini, et :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card}(E_k).$$

(iii) En particulier, pour tout ensemble fini E et pour tout entier $n \geq 1$, E^n est fini et :

$$\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Le premier point est très clair sur un dessin ! Les autres ne sont qu'une conséquence.

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.

Cette proposition est très utile en dénombrement. Elle nous sert à gérer les cas où les objets à dénombrer s'obtiennent par choix successifs. Un de ses corollaire (non écrit ici pour rester simple) justifie le modèle de rédaction suivant.

On lance deux dés à 6 faces classiques, et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus. Dénombrons (à nouveau) le nombre de résultats possibles n'amenant pas deux fois la même face.

Pour construire un tel résultat, on raisonne par *choix successifs :*

- Il y a 6 manières de choisir le résultat du premier dé.
- Une fois ce résultat choisi, il y a 5 manières de choisir le résultat du second dé pour qu'il soit différent du premier choix.

Par principe multiplicatif, il y a donc $6 \times 5 = 30$ tels résultats.

5. Le principe des tiroirs (HP)

Si vous avez plus de chaussettes que de tiroirs, vous aurez nécessairement deux chaussettes dans le même tiroir.

Proposition 13. *soient A et B deux ensembles finis. Si* $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$, *alors toute application*

$$f : A \to B$$

est non injective.

Démonstration. En exercice facultatif (utiliser les propositions vues jusqu'ici), un peu difficile. □

Exemple 14. On choisit $n+1$ entiers distincts dans l'ensemble $[\![1, 2N]\!]$. Montrer que deux de ces entiers sont consécutifs.

6. Exemples type de dénombrement

On a vu jusqu'ici trois principes, en plus du principe de bijectivité :

- Le passage au complémentaire,
- L'utilisation de cas disjoints,
- Le raisonnement par choix successifs.

Ajoutons à cela la proposition portant sur le cardinal d'une réunion, et vous avez le ciment de toutes nos démonstrations de dénombrement.

Exemple 15. On lance deux dés à 6 faces, et on note les résultats obtenus dans l'ordre. Quel est le nombre de face comportant au moins une fois la face 1? (2 méthodes).

Exemple 16. On tire deux cartes dans un jeu classique de 52 cartes, et on regarde la main obtenue (sans prendre en compte l'ordre du tirage). Quel est le nombre de mains comportant exactement une carte coeur?

Exemple 17. On lance successivement deux dés à 6 faces, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Combien de résultats pour lesquels les deux faces ont la même parité peut-on obtenir? (2 méthodes).

II. Parties d'un ensemble, permutations

1. Arbres binaires

Exemple 18. Dessin à noter!

Pour passer d'un arbre binaire de hauteur n à un arbre binaire de hauteur $n+1$, on ajoute deux branches à chaque feuille, et on multiplie ainsi le nombre de feuilles par deux. D'où la proposition :

Proposition 19. *Un arbre binaire de hauteur n possède 2^n feuilles.*

(Définition :) On appelle *chemin* d'un arbre binaire toute suite de branches successivement adjacentes reliant la racine à une feuille.

Exemple 20. Dessin à noter.

Remarque. Un chemin est exactement déterminé par sa feuille d'arrivée. Conséquence :

Proposition 21. *Tout arbre binaire de hauteur n admet 2^n chemins.*

Remarque. On peut aussi voir les choses comme ça, mais c'est moins élégant. Pour construire un chemin dans un arbre binaire de hauteur n, on doit faire n choix successifs. Partant de l'origine, on a successivement le choix parmi les deux branches que l'on peut emprunter. Il y a n de ces choix, et chaque choix comporte deux possibilités. Par principe multiplicatif, il y a donc $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ tels choix.

Cela permet de voir la proposition fondamentale suivante.

Proposition 22. *Soit E un ensemble fini. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini, et*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Démonstration. À noter. □

2. Factorielle

Rappel : On note $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et par convention :

$$0! = 1.$$

Exemple 23. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Simplifions $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

(*ii*) Simplifions $\dfrac{n}{n!}$.

Remarque. Attention, l'opération de factorielle est prioritaire sur les produits. Par exemple, $2 \times 3! = 2 \times (3!)$. Idem, $n + 1! = n + 1$ (ce qui n'est pas, à priori, $(n+1)!$.

Remarque. Vous devez savoir coder la factorielle en Python (il n'y a pas de telle fonction au programme). Voici un code :

```
def Factorielle(n):
        P=1
        for i in range(1,n+1):
                P=P*i
        return(P)
```

D'un point de vue combinatoire, voici le sens de la factorielle.

Proposition 24. *Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors, il y a exactement $n!$ bijections de E vers F.*

Démonstration. À noter. □

Définition 25. (et proposition) Soit E un ensemble fini. Posons $n = \mathrm{Card}(E)$. On appelle ensemble des permutations de E, et on note $S(E)$, l'ensemble des bijections de E vers E. Alors,

$$\mathrm{Card}(S(E)) = n!.$$

Remarque. C'est une conséquence de la proposition précédente.

Exemple 26. Listons les permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$, puis de $\{1, 2, 3\}$.

Remarque. Méthode : Utilisation pour dénombrer.

On se sert très souvent de ce principe pour dénombrer des objets obtenues à partir de permutations.

Par exemple, dénombrons le nombre d'anagrammes du mot "ECG1A".

Ces lettres étant deux à deux distinctes, un tel anagramme est déterminé de manière unique par la donnée d'une permutation des 5 places de ces lettres.
Il y a $5! = 120$ telles permutations, donc il y a 120 anagrammes du mot "ECG1A".

III. Coefficients binomiaux

1. Définition

Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini, d'après une proposition précédente. Par conséquent, l'ensemble $P_k(E)$ des parties de E de cardinal k est un ensemble fini. Il admet donc un cardinal.

De plus, on peut montrer que si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, alors ils ont autant de parties comportant k éléments : $\mathcal{P}_k(E)$ et $\mathcal{P}_k(F)$ sont de même cardinal.

Pour démontrer cela, on utilise le principe de bijectivité.

Définition 27. (Et proposition) Soient n et k deux entiers naturels. On appelle coefficient binomial k parmi n, et on note $\binom{n}{k}$, le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble de cardinal n. Cet entier est bien défini (ce nombre ne dépend pas de l'ensemble de cardinal n choisi).

Démonstration. Admise. Dessin à noter. □

Exemple 28. (*i*) $\binom{5}{1} =$

(*ii*) $\binom{3}{2} = \dots$

(*iii*) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \dots$

(*iv*) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{n} = \dots$

(*v*) $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = \dots$

(*vi*) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p > n, \binom{n}{p} = \dots$

Proposition 29. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *et* $p \in [\![0, n]\!]$. *Alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Il faut retenir que cette proposition exprime un passage au complémentaire : une partie à p éléments est entièrement déterminée par sa partie complémentaire, de cardinal $n - p$.

Exemple 30. On lance n fois une pièce à pile ou face, et on note dans l'ordre les résultats obtenus. Combien de résultats comportent exactement p fois la face pile?

Exemple 31. On peut aussi voir ça sur un arbre binaire. Cela se généralise à toute suite d'expériences n'ayant chacune que deux résultats possibles (succès ou échec).

Exemple 32. Combien de mains à 5 cartes (d'un jeu de 52 cartes) contiennent exactement 2 cartes coeur?

2. La formule du triangle de Pascal

Proposition 33. (Formule du triangle de Pascal) *Soient* n *et* p *deux entiers naturels. Alors :*

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 34. Intérêt n°1 : Dresser le *triangle de Pascal* pour calculer ces coefficients $\binom{n}{k}$ sur des petites valeurs de n (à noter).

Exemple 35. Intérêt n°2 : Démontrer la formule ci-dessous :

Proposition 36. *Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration. À noter. □

Au passage, cela permet de démontrer la formule suivante à connaitre :

Proposition 37. *Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 1$. Alors :*

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration. À noter. □

3. La formule du binôme de Newton

Remarque. La formule ci-dessous se retrouve en imaginant le développement de $(a+b)^n$ à partir de :

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$$

(à noter).

Proposition 38. (Formule du binôme de Newton) *Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 39. Calculons les sommes suivantes :

(*i*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Interprétation combinatoire à noter.

(*ii*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

(*iii*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, puis $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$

Exemple 40. Développer $(1+X)^6$.