Correction : DS n°2

DS du 24 novembre.

Exercice 1 *Non corrigé : voir cours.*

1. (a) On dit que f est définie sur I si $I \subset D_f$.

2.

3. u est dite croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, u_{n+1} \geq u_n$. Supposons u croissante, montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, P(n)$ où pour tout entier $n \geq n_0$:

$$P(n) : u_n \geq u_{n_0}.$$

Initialisation : $u_{n_0} \geq u_{n_0}$ est vrai, ce qui démontre $P(n_0)$.

Hérédité : Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$: $u_n \geq u_{n_0}$.
Par croissance de u : $u_{n+1} \geq u_n$.
Donc par transitivité : $u_{n+1} \geq u_{n_0}$. Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

4. En divisant par 10 (qui est non nul), on obtient:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{13}{10}u_{n+1} - \frac{3}{10}u_n.$$

Ainsi, $\boxed{u \text{ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, à coefficients constants.}}$

L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est :

$$x^2 - \frac{13}{10}x + \frac{3}{10} = 0.$$

1 est clairement solution de cette équation polynomiale du second degré, donc d'après les relations coefficients-racines, son autre solution x_2 vérifie $1 \times x_2 = \frac{3}{10}$.
Cette équation admet donc deux solutions distinctes 1 et $\frac{3}{10}$. Par théorème, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 1^n + \mu(\frac{3}{10})^n = \lambda + \mu(\frac{3}{10})^n.$$

Alors, $u_0 = 5$ et $u_1 = 7$ montre que λ et μ sont solutions du système :

$$(S) \begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ \lambda + \frac{3}{10}\mu = 7 \end{cases} .$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ (\frac{3}{10} - 1)\mu = 7 - 5 (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ (-\frac{7}{10})\mu = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 5 - \mu = \frac{55}{7} \\ \mu = -\frac{20}{7} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{55}{7} - \frac{20}{7}(\frac{3}{10})^n.}$$

5.

6.

7.

$$(S) \iff \begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ x-y-z=1 \\ 2x-y+2z=-2 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x-y-z=1 \\ 2x+3y-2z=2 \\ 2x-y+2z=-2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x-y-z=1 \\ \quad 5y \quad =0 \\ \quad y+4z=-4 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-\frac{1}{5}L_2}{\iff} \begin{cases} x-y-z=1 \\ \quad 5y \quad =0 \\ \qquad 4z=-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1+y+z=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'unique solution de ce système est donc } (0,0,-1).}$

8.

9.

10. `L=[k**2 for k in range(1,10**7+1)]`.

Exercice 2

1. (*a*) $P(0)=0-0+0-0=0$ et $P(1)=\dfrac{8}{8}-\dfrac{18}{8}+\dfrac{13}{8}-\dfrac{3}{8}=0$ donc

   $\boxed{0 \text{ et } 1 \text{ sont deux racines de } P.}$

   (*b*) Effectuons la division euclidienne de P par $X(X-1)=X^2-X$. (la poser sur copie). Il vient :

$$P(X)=(X^2-X)(X^2-\frac{5}{4}X+\frac{3}{8}).$$

Posons $Q(X)=(X^2-\frac{5}{4}X+\frac{3}{8})$. Q est un polynôme du second degré, de discriminant

$$\Delta=\frac{25}{16}-\frac{12}{8}=\frac{1}{16}>0.$$

Les racines de Q sont donc :

$$x_1=\frac{\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{1}{16}}}{2}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{2}$$

et

$$x_2=\frac{3}{4}.$$

Par conséquent : $Q(X)=(X-\frac{1}{2})(X-\frac{3}{4})$. Ainsi :

$\boxed{\text{La factorisation maximale de } P \text{ est } P(X)=X(X-1)(X-\frac{1}{2})(X-\frac{3}{4}).}$

(c) Dressons le tableau de signe de P. *Le faire : on fait apparaitre les facteurs* $X, X-1, X-\frac{1}{2}$ *et* $X-\frac{3}{4}$ *en mettant les racines dans le bon ordre* $(0<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1)$. Il vient :

$$\boxed{\text{L'ensemble des réels } x \text{ tels que } P(x)>0 \text{ est }]-\infty,0[\cup]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\cup]1,+\infty[.}$$

2. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4\times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}$. Alors :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{3\times 5}\frac{3^k}{5^{2k}}$$

donc par linéarité :

$$S_n=\frac{4}{15}\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{5^{2k}}=\frac{4}{15}\sum_{k=0}^{n}(\frac{3}{5^2})^k.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}\neq 1$ donc :

$$S_n=\frac{4}{15}\times\frac{1-(\frac{3}{25})^{n+1}}{1-\frac{3}{25}}=\frac{4}{15}\times\frac{25}{22}\times(1-(\frac{3}{25})^{n+1})=\frac{2\times 2\times 5\times 5}{3\times 5\times 2\times 11}(1-(\frac{3}{25})^{n+1})=\frac{10}{33}(1-(\frac{3}{25})^{n+1}).$$

Finalement, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{4\times 3^{k-1}}{5^{2k+1}}=\frac{10}{33}(1-(\frac{3}{25})^{n+1}).}$

3. Posons $S_n=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}2^{i+j}$.

Alors, $S_n=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}2^{i+j}$. Or, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{j}2^{i+j}=2^j\sum_{i=1}^{j}2^i$ donc, reconnaissant une somme géométrique de raison $2\neq 1$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{j}2^{i+j}=2^j\times 2^1\frac{2^j-1}{2-1}=2^{j+1}(2^j-1)=2^{2j+1}-2^{j+1}.$$

Alors par linéarité:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}2^{2j+1}-2^{j+1}=\sum_{j=1}^{n}2\times 2^{2j}-\sum_{j=1}^{n}2\times 2^j=2\sum_{j=1}^{n}4^j-2\sum_{j=1}^{n}2^j.$$

On reconnait à nouveau des sommes géométriques de raisons différentes de 1:

$$S_n=2\times 4\frac{4^n-1}{4-1}-2\times 2\frac{2^n-1}{2-1}=\frac{8}{3}(4^n-1)-4(2^n-1)=\frac{8}{3}4^n-2^{n+2}-\frac{20}{3}.$$

Finalement, $\boxed{S_n=\frac{8}{3}4^n-2^{n+2}-\frac{20}{3}.}$

4. (a) Soit $m\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel x:

$$\begin{aligned}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=m &\iff e^x-e^{-x}=2m\\ &\iff e^x-2m-e^{-x}=0\\ &\iff (e^x)^2-2me^x-1=0 \text{ (car } e^x\neq 0)\end{aligned}$$

Ainsi, x vérifie $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=m$ si et seulement si e^x est racine du polynôme

$$P(X)=X^2-2mX-1.$$

Le discriminant de P, polynôme de degré 2, est $\Delta = 4m^2 + 4$. Or, $m^2 \geq 0$ donc $4m^2 \geq 0$ donc $\Delta > 4 \geq 0$.

Ainsi, P admet deux racines distinctes données par :

$$x_1 = \frac{2m + \sqrt{4m^2+4}}{2} = m + \sqrt{m^2+1}$$

et

$$x_2 = \frac{2m - \sqrt{4m^2+4}}{2} = m - \sqrt{m^2+1}.$$

Montrons que $x_2 < 0 < x_1$. On a $m^2 + 1 > m^2 \geq 0$ donc par croissance stricte de la fonction racine carrée :

$$\sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = |m|.$$

Ainsi, $\sqrt{m^2+1} > |m| \geq -m$ donc $m + \sqrt{m^2+1} > 0$, d'où $x_1 > 0$.

De même, $\sqrt{m^2+1} > m$ donc $m - \sqrt{m^2+1} < 0$ donc $x_2 < 0$.

Finalement : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x = x_1$ ou $e^x = x_2 \iff e^x = x_1$ (car $e^x > 0$ et $x_2 < 0$).
Donc $(x_1 > 0)$:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \iff e^x = x_1 \iff x = \ln(x_1).$$

Finalement, l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = m$ admet pour unique solution $\ln(m + \sqrt{m^2+1})$.

(*b*) Tout d'abord, la fonction f admet $\mathbb{R}$ comme domaine de définition : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, l'unique antécédent de m par f est $\ln(m + \sqrt{m^2+1})$. Ainsi, tout réel admet au plus un antécédent par f : $f$est injective. De plus, pour la même raison, tout réel admet un antécédent par f, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$: f est surjective.

5. Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$(S) \begin{cases} x - my + z = 0 \\ mx - y \quad = 2 \\ x + y - mz = 1 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x - my + z = 0 \\ \quad (m^2-1)y - mz = 2 \\ \quad (1+m)y - (m+1)z = 1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x - my + z = 0 \\ \quad (1+m)y - (m+1)z = 1 \\ \quad (m^2-1)y - mz = 2 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_2}{\iff} \begin{cases} x - my + z = 0 \\ \quad (1+m)y - (m+1)z = 1 \\ \qquad (-m + (m^2-1))z = 2 - (m-1) \end{cases}$$

$$\iff (T) \begin{cases} x - my + z = 0 \\ \quad (1+m)y - (m+1)z = 1 \\ \qquad (m^2 - m - 1)z = 3 - m \end{cases}$$

Le système équivalent obtenu (T) est triangulaire, donc il est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux $1 + m$ et $m^2 - m - 1$ sont non nuls. Le discriminant de $X^2 - X - 1$ est 5, ses racines sont $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, (T) est de Cramer si et seulement si $m \notin \{-1, \phi, \bar{\phi}\}$.

1e cas : Si $m \notin \{-1, \phi, \bar{\phi}\}$.

$$(S) \iff (T) \iff \begin{cases} x = my - z = \dfrac{m^2+2m-(3-m)(m+1)}{(m^2-m-1)(m+1)} = \dfrac{2m^2-3}{(m^2-m-1)(m+1)} \\ y = \dfrac{1}{m+1} + z = \dfrac{m^2-m-1+(3-m)(m+1)}{(m^2-m-1)(m+1)} = \dfrac{m+2}{(m^2-m-1)(m+1)} \\ z = \dfrac{3-m}{m^2-m-1} \end{cases}$$

2e cas : Si $m = -1$:

$$(S) \iff (T) : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=1 \\ z=4 \end{cases}$$

Le système obtenu est incompatible.

3e cas : Si $m = \phi$ ou $m = \bar{\phi}$.

$$(S) \iff \begin{cases} x - my + z = 0 \\ (1+m)y - (m+1)z = 1 \\ (-m + (m^2-1))z = 2 - (m-1) \end{cases} \iff (T) \begin{cases} x - my + z = 0 \\ (1+m)y - (m+1)z = 1 \\ 0 = 3-m \end{cases}.$$

Or $3 - m \neq 0$ car $3 \neq \phi$ et $3 \neq \bar{\phi}$ car $\bar{\phi} < \phi < \dfrac{1+5}{2} = 3$ car $\sqrt{5} < 5$. Ainsi, le système obtenu est incompatible.

Finalement :

- Si $m \in \{-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\}$, alors (S) est incompatible : son ensemble de solutions est vide.
- Sinon, (S) est de Cramer et admet comme unique solution $(\dfrac{2m^2-3}{(m^2-m-1)(m+1)}, \dfrac{m+2}{(m^2-m-1)(m+1)}, \dfrac{3-m}{m^2-m-1})$.

6. (a) $x \mapsto \sqrt{x}$ admet $\mathbb{R}_+$ comme domaine de définition. $x \mapsto x+1$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$, comme somme de fonctions.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$, et P le polynôme donné par

$$P(X) = X^2 - X + 1 - y.$$

P est un polynôme du second degré, de discriminant $\Delta = 1 - 4(1-y) = 4y - 3$. Ainsi, $\Delta \geq 0 \iff 4y - 3 \geq 0 \iff y \geq \dfrac{3}{4}$ (la même chaîne d'équivalence étant vraie avec des égalités). Par conséquent :

1e cas : Si $y < \dfrac{3}{4}$, alors $\Delta < 0$ donc P n'admet aucune racine.

2e cas : Si $y = \dfrac{3}{4}$, alors $\Delta = 0$ donc P admet une unique racine : $\dfrac{1}{2}$.

3e cas : Sinon, $y > \dfrac{3}{4}$ donc $\Delta > 0$ et P admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{4y-3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{4y-3}}{2}.$$

(c) Soit $y \in f(D_f)$, montrons que $y \geq \dfrac{3}{4}$.

Par définition de $f(D_f)$, y admet un antécédent par f : il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$. Alors :

$$x - \sqrt{x} + 1 = y$$

donc :

$$(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1 - y = 0.$$

Ainsi, $\sqrt{x}$ est racine du polynôme $X^2 - X + 1 - y$. D'après la question précédente, ce polynôme admet une racine si et seulement si $y \geq \dfrac{3}{4}$. Ceci démontre bien $y \geq \dfrac{3}{4}$.

On a donc bien montré $\boxed{f(D_f) \subset [\frac{3}{4}, +\infty[.}$

(*d*) Soit $y \in [\frac{3}{4}, +\infty[$.

Alors, d'après la question (*b*), le polynôme $P(X) = X^2 - X + 1 - y$ admet deux racines éventuellement confondues :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{4y-3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{4y-3}}{2}.$$

En particulier, $x_2 \geq 0$ car $1 + \sqrt{4y-3}$ est positif comme somme de réels positifs.
Posons $x = x_2^2$ de sorte que $x_2 = \sqrt{x}$ ($x_2 \geq 0$). Alors, $x \in \mathbb{R}_+$ et :

$$P(x_2) = 0 \iff x_2^2 - x_2 + 1 - y = 0 \iff x - \sqrt{x} + 1 = y \iff f(x) = y.$$

Ceci montre que x est un antécédent de y par f.

Si $y \geq \frac{3}{4}$, alors $(\frac{1 + \sqrt{4y-3}}{2})^2$ est un antécédent de y par f.

(*e*) D'après la question précédente, tout élément de $[\frac{3}{4}, +\infty[$ admet un antécédent par f, donc :

$$[\frac{3}{4}, +\infty[\subset f(\mathbb{R}_+).$$

Avec la question (*c*), $\boxed{\text{ceci démontre, par double inclusion, que : } f(D_f) = [\frac{3}{4}, +\infty[.}$

(*f*) *Idée : Utilisons le résultat de la question (b) pour $y = 1$. Cela donne deux solutions distinctes se transformant en deux antécédents de 1 par f. Il fallait repérer que la situation était simple pour $y = 1$. Dans ce cas $y = 1$, les racines de P sont 0 et 1 ce qui fournit deux antécédents de 1 par f : $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, comme on peut le retrouver avec la démarche du (d).* On a $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$ et $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$ donc 0 et 1 sont deux antécédents distincts de 1 par f. Ainsi, f n'est pas injective.

Exercice 3

1. *Pour passer de u_0 à u_n, on applique n fois la relation de récurrence.*

```
def SuiteU(n):
        u=0
        for i in range(n):
                u=(2*u+1)/(2+u)
        return(u)
```

2. Posons, pour tout entier n, $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 \leq u_n < 1$ ».
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Initialisation : $P(0)$ s'écrit « u_0 est bien définie et $0 \leq u_0 < 1$ », ce qui est clair vu la définition donnée de la suite u ($u_0 = 0$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n est bien définie et $0 \leq u_n < 1$. En particulier, $2 + u_n \geq 2$ donc $2 + u_n \neq 0$. Ainsi, u_{n+1} est bien défini par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n}.$$

et u_{n+1} est positif comme quotient de réels positifs ($2u_n + 1 \geq 1$ car $u_n \geq 0$, et $2 + u_n \geq 2 > 0$). De plus, $u_n < 1$ donc $u_n + 1 < 2$, donc $2u_n + 1 < u_n + 2$. Par quotient ($u_n + 2 > 0$) :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{2 + u_n} < 1$$

Finalement, on a bien montré : u_{n+1} est bien défini et $0 \leq u_{n+1} < 1$, d'où l'hérédité.

$\boxed{\text{Par récurrence, on a bien montré que } u_n \text{ est bien défini et vérifie } 0 \leq u_n < 1, \text{ pour tout entier } n.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1 - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{1 - u_n^2}{2 + u_n}.$$

Or, d'après la question précédente, $0 \leq u_n < 1$ donc $0 \leq u_n^2 \leq 1^2 = 1$, d'où :

$$1 - u_n^2 > 0.$$

On a de plus $2 + u_n > 0$ donc par quotient :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } u \text{ est strictement croissante.}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \geq 0$ d'après la question 2., donc $u_n + 1 \geq 1$ donc $u_n + 1 \neq 0$.De plus, $u_n < 1$ donc $u_n - 1 < 0$ donc $u_n - 1 \neq 0$. Ainsi, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ est bien défini, et est non nul comme quotient de réels non nuls.

On a bien montré : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ v_n \text{ est bien défini et non nul.}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n+1}{2+u_n} - 1}{\frac{2u_n+1}{2+u_n} + 1} = \frac{\frac{2u_n+1-2-u_n}{2+u_n}}{\frac{2u_n+1+2+u_n}{2+u_n}} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n$$

On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{3}.}$$

6. Par théorème, v étant géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0(\frac{1}{3})^n.$$

Or, $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -(\frac{1}{3})^n.}$$

7. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation (E) : $\dfrac{x-1}{x+1} = y$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$y = \frac{x-1}{x+1} \iff y(x+1) = x - 1 \iff (y-1)x = -1 - y.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } y = 1,\ x \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } 0 = -2, \text{ ce qui est faux, donc } (E) \text{ n'admet pas de solutions.}\\ \text{Sinon, } x \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } x = \dfrac{1+y}{1-y} \text{ : l'unique solution de } (E) \text{ est } \dfrac{1+y}{1-y}.\end{array}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Autrement dit, u_n est solution de l'équation :

$$v_n = \frac{1+x}{1-x}.$$

D'après la question précédente, $v_n \neq 1$ et $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$. D'après la question 6. :

$$u_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}.$$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}.}$

Exercice 4

1. $t \mapsto \ln(t)$ admet pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^{t-1}$ ont pour domaine de définition $\mathbb{R}$. Ainsi, pour x réel, l'expression $x + \ln(x)$ est bien définie ssi $x 0$, et l'expression e^{x-1} est bien définie, donc l'expression $f(x)$ est bien définie ssi $x > 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \ln(t)$ qui le sont. Pour tout réel $x > 0$:

   $$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{x}).$$

   Or, $g > 0$ donc $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1 - \dfrac{1}{x}$. Alors :

   $$g'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} < 1 \iff x > 1.$$

   (et la même chaine d'équivalence est vraie avec des égalités).

   Le tableau de variation de g est donc :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	-	0	+	
$g(x)$	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

3. D'après son tableau de variation, g adme tun minimum en 1 qui vaut $g(1) = 1$. Ainsi :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq 1.$$

   En particulier : $\boxed{\forall x > 0, g(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0.}$

4. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$, $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^{t-1}$ étant dérivables sur leurs domaines de définition, f est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

   $$\boxed{\text{Alors, pour tout réel } x > 0 : \quad f'(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{x-1} + (x + \ln(x))e^{x-1} = (1 + x + \frac{1}{x} + \ln(x))e^{x-1}.}$$

   De plus, $e^{x-1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1+x+\dfrac{1}{x}+\ln(x)$. Or, D'après la question précédente ($x > 0$), on a :

   $$\frac{1}{x} + \ln(x) > 0.$$

   De plus, $1 + x > 1 \geq 0$. Par somme :

   $$1 + x + \frac{1}{x} + \ln(x) > 0$$

   donc $f'(x) > 0$, pour tout $x \in D_f$.

   $\boxed{\text{Par théorème, } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } D_f = \mathbb{R}_+^*.}$

5. f étant dérivable en 1, sa courbe admet une tangente en 1 : la droite d'équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Or, $f'(1) = (1+1+1+0)e^0 = 3$ et $f(1) = (1+0)e^0 = 1$ donc :

$\boxed{\text{L'équation de la tangente à la courbe de } f \text{ en 1 est } y = 3x-2.}$

6. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, où pour tout entier n :

$$P(n) : u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 2.$$

Initialisation : Par définition de u, $u_0 = 2$ donc u_0 est bien défini et $u_0 \geq 2$. Ceci démontre $P(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$, u_n est bien défini et $u_n \geq 2$. En particulier, $u_n > 0$ donc $u_n \in D_f$. Ainsi, u_{n+1} est bien défini par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, f étant (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$u_n \geq 2 \implies f(u_n) \geq f(2).$$

On a donc $u_{n+1} \geq f(2) = (2+\ln(2))e^1$. Or, $\ln(2) \geq \ln(1) = 0$ et $e^1 \geq e^0 = 1$. Donc :

$$2 + \ln(2) \geq 2 \text{ et } e^1 \geq 1.$$

Par produit d'inégalités à membres positifs :

$$f(2) \geq 2.$$

Ainsi, $u_{n+1} \geq f(2) \geq 2$, donc $u_n \geq 2$. Cela termine la démonstration de $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

7. (a)
```
import numpy as np
def f(x):
        if x<=0:
                print("hors domaine")
        else:
                return((x+np.log(x))*np.exp(x-1))
```

(b)
```
def SuiteU(n):
        u=0
        for i in range(n):
                u=f(u)
        return(u)
```

8. **Attention, il y a bien un lien entre la croissance de f et la monotonie de u, mais il n'est pas trivial au point de pouvoir affirmer : f est croissante donc u est croissante.**

Montrons que u est strictement croissante. On procède par récurrence en démontrant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : u_{n+1} > u_n.$$

Initialisation : Montrons $P(1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_0$.

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2)$. Or, $\ln(2) > 0$ car $2 > 1$, donc $(2+\ln(2)) > 2$ donc $f(2) > 2$ (car $e^1 > 1$).

Ainsi, $u_1 > u_0$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n) : u_{n+1} > u_n$. Par stricte croissante de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

donc par définition de u:

$$u_{n+2} > u_{n+1}.$$

Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

$\boxed{\text{La suite } u \text{ est strictement croissante.}}$

9. Montrons par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : u_n > e^n.$$

Initialisation : $u_0 = 2 > 1 = e^0$ d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > e^n$. Montrons $P(n+1)$: $u_{n+1} > e^{n+1}$.

D'après la question 6, $u_n \geq 2$ donc $u_n - 1 \geq 1$. Ainsi, $e^{u_n - 1} \geq e$. On en tire :
$$u_{n+1} = (u_n + \ln(u_n))e^{u_n - 1} \geq (u_n + \ln(u_n))e$$
(car $u_n + \ln(u_n)$ est positif, car $u_n \geq 2$). Or, $\ln(u_n) \geq 0$ donc $u_n + \ln(u_n) \geq u_n \geq e^n$, par $P(n)$. On a donc ($e > 0$):
$$(u_n + \ln(u_n))e \geq e^n \times e = e^{n+1}.$$

Par transitivité :
$$u_{n+1} \geq e^{n+1}$$
ce qui démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n.}$

10. Pour tout entier n :
$$e^n \geq 10^{20} \iff n \geq 20\ln(10).$$

Ainsi, si n est un entier tel que $n \geq 20\ln(10)$ (comme par exemple $\lfloor 20\ln(10) \rfloor + 1$ qui est bien un entier positif, car $\ln(10) > 0$), alors :
$$u_n \geq e^n \geq 10^{20}.$$

Par transitivité, $\boxed{\text{ceci prouve l'existence d'un entier } n \text{ tel que } u_n \geq 10^{20}.}$

11.
```
n=0
u=2
while u<10**20:
        u=f(u)
        n+=1
print(n)
```

Exercice 5

1. `Mystere(L)` renvoie `True` si la liste de nombres `L` est triée dans l'ordre décroissant, et `False` sinon.

2.
```
def SommeCarres(L):
        S=0
        for i in L:
                S=S+i**2
        return(S)
```

3.
```
def estSymetrique(L):
        for i in range(len(L)):
                if L[i]!=L[-(i+1)]:
                        return(False)
        return(True)
```

4.
```
def Symetrisee(L):
        G=[]
        for i in L:
                G.append(i)
        for i in range(1,len(L)+1):
                G.append(L[-i])
        return(G)
```

Exercice 6

1. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
& P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2) \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = \lambda x(x-1) + \mu x(x-2) + \gamma(x-1)(x-2) \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = (\lambda + \mu + \gamma)x^2 + (-\lambda - 2\mu - 3\gamma)x + 2\gamma \\
\overset{(1)}{\iff} & \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = a \\ -\lambda - 2\mu - 3\gamma = b \\ 2\gamma = c \end{cases} \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = a \\ -\mu - 2\gamma = a + b \\ 2\gamma = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda = a - \mu - \gamma = a + a + b + c - \frac{1}{2}c = 2a + b + \frac{1}{2}c \\ \mu = -(a + b + 2\gamma) = -a - b - c \\ \gamma = \frac{1}{2}c \end{cases}
\end{aligned}$$

(1) : par théorème d'identification, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux.

Par équivalence, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe un unique triplet de réels } (\lambda, \mu, \gamma) \text{ tel que} \\ \qquad P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2) \\ \text{donné par : } (2a + b + \frac{1}{2}c, -a - b - c, \frac{1}{2}c). \end{array}}$$

2. **Analyse.**

Par hypothèse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \lambda x(x-1) + \mu x(x-2) + \gamma(x-1)(x-2)$$

Ainsi, pour $x = 1$, on a :

$$P(2) = \lambda \times 2 \times 1 + \mu \times 0 + \gamma \times 0$$

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2).$$

Pour $x = 0$, il vient $P(0) = 2\gamma$ donc $\gamma = \frac{1}{2}P(0)$.

Pour $x = 1$, il vient $P(1) = -\mu$ donc $\mu = -P(1)$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si un tel triplet } (\lambda, \mu, \gamma) \text{ existe, alors il est unique, et donné par :} \\ \qquad \lambda = \frac{1}{2}P(2), \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0). \end{array}}$$

3. **Synthèse.**

On pose donc $Q(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2)$ où l'on a posé:

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2), \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0).$$

(a) $Q(0) = 0 + 0 + 2\gamma = 2 \times \frac{1}{2}P(0) = P(0)$.
$Q(1) = 0 - \mu + 0 = -(-P(1)) = P(1)$.
$Q(2) = 2\lambda + 0 + 0 = 2 \times \frac{1}{2}P(2) = P(2)$.

Ceci démontre $\boxed{\forall i \in \{0, 1, 2\}, P(i) = Q(i).}$

(b) Q est de degré au plus 2, comme somme des polynômes $\lambda X(X-1)$, $\mu X(X-2)$ et $\gamma(X-1)(X-2)$ de degrés au plus 2.

Par conséquent, $P-Q$ est un polynôme de degré au plus 2 comme somme de polynômes de degré au plus 2. Or, d'après la question précédente, pour tout $i \in \{0,1,2\}$:

$$(P-Q)(i) = P(i) - Q(i) = 0.$$

Ainsi, $P-Q$ est un polynôme de degré au plus 2 admettant 3 racines distinctes, et $3 > 2$. Par théorème, $P - Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\boxed{\text{Autrement dit, } P = Q.}$

(c) D'après la question précédente, le triplet (λ, μ, γ) donné par

$$\lambda = \frac{1}{2}P(2), \mu = -P(1) \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}P(0)$$

est solution du problème posé. D'après la conclusion de la question 2 :

Il existe un unique triplet de réels (λ, μ, γ) tel que $$P(X) = \lambda X(X-1) + \mu X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2),$$ donné par $(\frac{1}{2}P(2), -P(1), \frac{1}{2}P(0))$

— *Fin du corrigé* —