

Programme de colle n° 11 : Asymptotique des suites (fin). Ensembles finis, dénombrement.

Semaine du lundi 11 décembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Théorèmes d'existence de limites

11.1 Le théorème des suites adjacentes.

11.2 Utilisation des sous-suites formées par les termes de rangs pairs et impairs : une suite $(u_n)_n$ tend vers l (réel ou infini) ssi chaque suite $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tend vers l .

Ensembles finis, cardinal

11.3 Notion d'ensemble fini, de cardinal. Si E est un ensemble fini, alors toute partie A et E est finie et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$. De plus, $A = E$ ssi $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$. Cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini, utilisation en dénombrement. Si E est un ensemble fini, et F un ensemble, alors il existe une bijection de E vers F ssi F est fini et $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$.

11.4 Notion de parties disjointes, de réunion disjointe. Cardinal d'une réunion disjointe de 2, de $n \in \mathbb{N}^*$ parties d'un ensemble fini. Utilisation en dénombrement (raisonnement par cas disjoints).

11.5 Cardinal d'une réunion de deux parties d'un ensemble fini. Formule du crible pour une réunion de 3 parties. Utilisation en dénombrement (élèves : cf exemple 15).

11.6 Cardinal du produit cartésien d'ensembles finis. Utilisation en dénombrement : raisonnements par choix successifs.

11.7 (HP) Le principe des tiroirs : explication avec chaussettes et tiroirs, énoncé avec la notion d'injectivité.

Parties d'un ensemble, permutations

11.8 Notion d'arbre binaire de hauteur n . Nombre de feuilles d'un arbre binaire de hauteur n . Notion de chemin dans un tel arbre, nombre de chemins. Si E est fini, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$.

11.9 Factorielle d'un entier. Si E et F sont finis de cardinal n , alors il y a $n!$ bijections de E vers F . Notion de permutation d'un ensemble E , nombre de permutations d'un ensemble fini.

Coefficients binomiaux (à suivre)

11.10 Définition de $\binom{n}{k}$ comme nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Symétrie des coefficients binomiaux.

Python

11.11 Tri par insertion, par recherche du minimum, tri à bulles. Recherche dichotomique dans une liste triée.

Quelques questions de cours

- Énoncer le théorème des suites adjacentes. Montrer que les suites u et v données pour, $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ convergent vers la même limite.
- Énoncer et démontrer le théorème portant sur les sous suites de rangs pairs et impairs.
- Démontrer que la suite $u = (\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Énoncer les propriétés portant sur le cardinal du complémentaire, d'une réunion disjointe et d'une réunion. Démontrer la formule portant sur la réunion.
- Énoncer et démontrer la formule du crible.
- Énoncer et démontrer la formule donnant le cardinal d'un produit d'ensembles finis.
- Définir la notion de coefficient binomial. Énoncer la propriété de symétrie (29) de ces coefficients, et la démontrer.
- Donner le code d'une fonction python implémentant la recherche dichotomique pour une liste triée (version : recherche d'appartenance d'un élément).

La notion d'ensemble fini a été introduite sans trop de formalités, et les premières propriétés sont donc admises.

Aucun exercice n'a été vu pour le moment.

Pas de définition formelle pour cette notion, les résultats sont expliqués sans trop de formalisme conformément au programme.