

Programme de colle n° 1 : Dénombrement, début des limites de fonctions.

Semaine du lundi 18 décembre.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Le TD sur le dénombrement aura lieu mardi. Aucun exercice sur les limites de fonctions cette semaine. Les exercices de synthèse sur les suites sont les bienvenus.

Fin du dénombrement : coefficients binomiaux

1.1 On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce à pile ou face, et on note dans l'ordre les côtés obtenus. Alors, $\binom{n}{k}$ dénombre le nombre de résultats possibles comportant exactement k côtés pile (k entier).

1.2 La formule du triangle de Pascal. Le triangle de Pascal. Formule exprimant $\binom{n}{k}$ à l'aide de factoriels. Formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

1.3 La formule du binôme de Newton. Interprétation : en développant $(a+b)^n$ "à la main", on forme $\binom{n}{k}$ termes de la forme $a^k b^{n-k}$, et ce pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Quelques calculs de sommes classiques faisant intervenir les coefficients binomiaux.

Interprétation combinatoire de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Développement rapide de $(1+X)^6$.

Début des limites de fonctions (cours seulement).

1.4 Adhérence $\bar{I}$ d'un intervalle I . Limite finie d'une fonction en un point. Si f est définie en x_0 et admet une limite en x_0 alors cette limite est $f(x_0)$. Continuité en un point. Limite infinie d'une fonction en un point.

1.5 Limite (finie ou infinie) d'une fonction, définie sur un intervalle épointé d'un réel x_0 , en x_0 .

1.6 Limite à gauche et à droite d'une fonction en un point.

$\bar{I}$ définie comme la réunion de I et de ses bornes finies.

Quelques questions de cours

- Étudier l'éventuelle limite de la suite u donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$. Variante possible (choix du colleur) : $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ (exos 10 et 11, TD8).
- Définir la notion de coefficient binomial. Justifier (à l'écrit) le point 1.1 de ce programme de colle. Combien de main à 5 cartes tirées dans un jeu classique de 52 cartes contiennent exactement 2 cartes de cœur?
- Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal donnant $\binom{n+1}{p+1}$. On se contentera, pour la démonstration, du cas $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Énoncer et démontrer la formule donnant les coefficients binomiaux en terme de factoriels.
- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton (variante avec points de suspension acceptée, si rédigée proprement).
- Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notion de continuité d'une fonction en un point.
- Énoncer les définitions de trois notions de limites d'une fonction en un point (Au choix du colleur. Limite finie ou infinie, éventuellement à droite ou à gauche, d'une fonction définie ou non en ce point - 12 définitions possibles).
- Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = nu_n + n$. Écrire le code d'une fonction d'entête `def TermesU(n)` : prenant en entrée un entier `n` et renvoyant la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$. Puis, écrire un code affichant la représentation graphique des u_n , pour $0 \leq n \leq 150$.