Chapitre 10 : Limites de fonctions, notion de continuité en un point.

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Limites de fonctions : définitions

1. Limite d'une fonction en un point

a) Adhérence d'un intervalle

Rappel : Un intervalle I est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, ou $[a,b]$ avec a et b des réels ou éventuellement $a=-\infty$, $b=+\infty$. On dit que a et b sont les bornes de I, et ces bornes sont dites finies si ce sont des réels.

Par exemple, les bornes de $[2,+\infty[$ sont 2 et $+\infty$, et sa seule borne finie est 2. Les bornes de $]2,4[$ sont 2 et 4, et sont finies. $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ n'a pas de bornes finies (ses bornes sont $-\infty$ et $+\infty$).

Définition 1. On appelle adhérence d'un intervalle I, et on note $\bar{I}$, la réunion de I et de ses bornes finies.

Par exemple, $\overline{]-4,4]}=[-4,4]$ et $\overline{]-\infty,0[}=]-\infty,0]$.

Dans toute la suite, les intervalles considérés seront non vides et non réduits à un point. Ainsi, les énoncés donnés s'appliqueront aux intervalles d'une des forme donnée ci-dessus, avec $a<b$ quand a et b sont réels. On exclu ainsi de nos définitions les intervalles comme $[4,4]$ ou $]-1,-1]$, qui sont problématiques pour nos énoncés.

b) Limite finie d'une fonction en un point, continuité

Définition 2. Soit I un intervalle et $x_0 \in \bar{I}$. Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et l un réel. On dit que f admet l pour limite en x_0, et on écrit

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$$

si :

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I, |x-x_0|<\alpha \implies |f(x)-l|<\epsilon.$$

Remarque. Pour tous réels a, b et δ, on a $|a-b|<\delta \iff a \in]b-\delta, b+\delta[$. Ainsi, on aurait pu reformuler la définition de l'une des manières suivantes :

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I, x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\implies f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

ou encore

$$\forall \epsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in I\cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, f(x) \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

Remarque. Dans la définition, f est une fonction réelle d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, mais cette définition (et toutes celles de ce chapitre) s'applique à toute fonction réelle, même si son ensemble d'arrivée n'est qu'une partie de $\mathbb{R}$, comme $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x\end{array}\right.$.

Exemple 3. On peut montrer que les fonctions constantes ont une limite en tout point, qui est la constante en question. Autrement dit, si $c \in \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$c \xrightarrow[x \to x_0]{} c.$$

Exemple 4. On peut montrer $x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$ pour tout réel x_0.

Exemple 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $f_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont 0 est une borne finie. On pourra donc montrer :

$$x^\alpha \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}.$$

> **Définition 6. (et proposition)**
> Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$, de sorte que f est définie en x_0.
> Si f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0, alors $l = f(x_0)$.
> Dans ce cas, on dit que f est **continue en** x_0.

Démonstration. A noter. □

Exemple 7. La fonction $\mathrm{Id}_\mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue en tout réel.

Exemple 8. On admet les résultats suivants : la fonction exponentielle est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. Autrement dit:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, e^x \xrightarrow[x \to x_0]{} e^{x_0}.$$

La fonction logarithme népérien est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ln(x_0).$$

Remarque. Une fonction non continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ est dite **discontinue** en x_0.

Exemple 9. Montrons que la fonction partie entière $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ n'est pas continue en 0 (à noter). On montre de même que cette fonction est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

c) Limite infinie en un point

> **Définition 10.** Soit I un intervalle réel, $x_0 \in \bar{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
> (i) On dit que f admet $+\infty$ comme limite en x_0 si
>
> $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$
>
> On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.
> (ii) On dit que f admet $-\infty$ comme limite en x_0 si
>
> $$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < A$$
>
> On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$.

Remarque. La définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ s'interprète de la manière suivante : les valeurs $f(x)$ sont toutes si grandes que voulu quand x est assez proche de x_0 :

- $|x - x_0| < \alpha$ signifie que $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, c'est-à-dire que x est distant d'au plus α de x_0.

- Donc, à $A \in \mathbb{R}$ fixé, $\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A$ signifie " si x est assez proche de x_0, alors $f(x) > A$", le "assez proche" étant décrit par un réel α dont la définition impose l'existence.
- A étant quantifié avant α dans la définition, "α dépend de A".

Exemple 11. Illustration à noter.

Exemple 12. Montrons :

$$\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

d) Limite en x_0 d'une fonction définie sur un intervalle épointé de x_0.

Exemple 13. Illustration à noter.

On étend les définitions au cas des fonctions définie sur un intervalle épointé, c'est-à-dire un intervalle privé d'un point, pour pouvoir regarder la limite en ce point manquant.

Définition 14. Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

(i) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) On dit que f admet $+\infty$ comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$

(iii) On dit que f admet $-\infty$ comme limite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < A.$$

Exemple 15. La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrons que $\frac{1}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$.

e) Limite à gauche, limite à droite, intervalles épointés

On remarquera que la définition ci-dessous s'applique indifféremment que f soit définie en x_0 ou non.

Définition 16. (Limite à gauche)
Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

(i) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, f(x) > A.$$

(iii) On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[, f(x) < A.$$

Définition 17. (Limite à droite)
Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

(i) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) > A.$$

(iii) On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) < A.$$

Remarque. Les notions de limites à gauche et à droite excluent x_0 de la condition :

$$\ldots \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[\ldots$$

Exemple 18. Montrons que $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Exemple 19. Montrons que $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$.

Exemple 20. De même, $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0$.

L'étude des limites à gauches et à droites en un point permet souvent de conclure sur l'étude de la limite en ce point, grâce à la proposition suivante.

Proposition 21. *Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

- *Soit f une fonction réelle définie sur I (donc en x_0). Alors, il est équivalent de dire :*
  - *(i) $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$, et*
  - *(ii) $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$ et $l = f(x_0)$.*
- *Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Alors, il est équivalent de dire :*
  - *(i) $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$,*
  - *(ii) $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$.*

Démonstration. admis (mais résultat simple découlant juste des définitions). $\square$

Exemple 22. Montrons que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

Remarque. Morale de ces deux énoncés : une fonction admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 avec ces limites égales, et il faut en plus vérifier que ces limites valent $f(x_0)$ si f est définie en x_0.

Exemple 23. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet-elle des limites à droite et à gauche en 0? Que dire de sa limite en 0? (À noter)

f) Prolongement par continuité d'une fonction

Proposition 24. ***(et définition)*** *Soit I un intervalle, $x_0 \in \bar{I}$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 s'il existe un réel l tel que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l.$$

Dans ce cas, la fonction

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

est continue en x_0. $\tilde{f}$ est appelée le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque. Bien souvent, quand une fonction f est prolongeable par continuité en un point x_0, on fait l'abus de notation de toujours noter f le prolongement par continuité de f en x_0, à condition de l'indiquer clairement dans le texte.

Exemple 25. À noter : $x \mapsto x^\alpha$, pour $\alpha > 0$.

Exemple 26. À noter : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

2. Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

a) Voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Considérons un intervalle I de bornes a et b (pouvant être réelles ou infinies, avec $a < b$) de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. On dit alors que a est la borne inférieure de I et b la borne supérieure de I.

Définition 27. On dit qu'un intervalle est un voisinage de $+\infty$ si sa borne supérieure est $+\infty$. On dit qu'un intervalle est un voisinage de $-\infty$ si sa borne inférieure est $-\infty$.

Par exemple,

- $]-1, 0]$
- $]-\infty, 2[$
- $\mathbb{R}$

b) Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Définition 28. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > B \implies f(x) < A.$$

Définition 29. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

(*i*) Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(*ii*) On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies f(x) > A.$$

(*iii*) On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x < B \implies f(x) < A.$$

Remarque. On retrouve les interprétations des définitions précédentes, en remplaçant “x assez proche de x_0” par “x assez grand” pour la limite en $+\infty$ ou “x assez petit” pour la limite en $-\infty$.

Exemple 30. Illustration à noter.

Remarque. Ces définitions s'adaptent sans mal si f est définie sur un intervalle épointé, donc si f est définie sur une partie de la forme $I \setminus \{x_0\}$ pour $x_0 \in I$ (et, toujours, I un voisinage de l'infini que l'on considère). Par exemple, si $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

On remplace simplement I par le domaine de définition de f.

Exemple 31. (*i*) $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

(*ii*) $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

(*iii*) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

(*iv*) $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

II. Énoncés généraux sur les limites

Les énoncés seront tous admis.

Définition 32. (Notion de voisinage)

(*i*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0 si :

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset V.$$

(*ii*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0^+ (ou voisinage à droite épointé de x_0) si :

$$\exists \delta > 0,]x_0, x_0 + \delta[\subset V.$$

(*iii*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un intervalle V est un voisinage de x_0^- (ou voisinage à gauche épointé de x_0) si :

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0[\subset V.$$

(*iv*) On dit qu'un intervalle V est un voisinage de $+\infty$ si :

$$\exists A \in \mathbb{R},]A, +\infty[\subset V.$$

(*v*) On dit qu'un intervalle V est un voisinage de $-\infty$ si :

$$\exists A \in \mathbb{R},]-\infty, A[\subset V.$$

1. Unicité de la limite, notation lim

Proposition 33. *Si la limite d'une fonction en un point, à gauche ou a droite d'un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$ existe, alors elle est unique.*
Autrement dit, si l et l' sont deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$:

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \text{ et } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l' \implies l = l',$$

où a peut désigner chacune des situations précédentes : un réel, une limite à gauche ou a droite, $+\infty$ ou $-\infty$, et où f est une fonction réelle permettant de définir la notion de limite considérée ci-dessus.

Remarque. Cette proposition justifie la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ pour paraphraser $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$. On peut alors utiliser $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour désigner la limite de f en a, mais **attention**, utiliser cette notation affirme que f admet une limite (finie ou infinie) en a. On s'assurera d'avoir bien démontré que cette limite existe avant d'utiliser la notation lim.

2. Passage à la limite des inégalités

Proposition 34. *Soient I un intervalle, $a \in \bar{I}$, et f et g deux fonctions définies sur I. Supposons qu'il existe un voisinage V de a tel que :*

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x).$$

Si f et g admettent des limites finies en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Remarque. Dans le cas où $a \in I$ est un réel, la même proposition est vraie en remplaçant partout I par $I \setminus \{a\}$, afin de traiter le cas où f et g ne sont pas définie en a.

Remarque. La même proposition est également vraie pour les limites à gauche et à droite en a.

Remarque. Comme pour les suites, cet énoncé n'est vrai qu'avec des inégalités larges. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 < 1 + \frac{1}{x}$ mais

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

donc l'inégalité stricte entre les limites n'a pas lieu.

3. Opérations algébriques sur les limites

a) Addition

Proposition 35. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions qui admettent une limite en a. Alors, dans les cas non marqués F.I. (pour forme indéterminée), le tableau suivant donne la limite de $f+g$ en a.*

$\lim\limits_{x\to a} f \setminus \lim\limits_{x\to a} g$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

b) Produit

Proposition 36. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions qui admettent une limite en a. Alors, dans les cas non marqués F.I. (pour forme indéterminée), le tableau suivant donne la limite de fg en a.*

$\lim\limits_{x\to a} f \setminus \lim\limits_{x\to a} g$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	0	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}_-^*$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$l' \in \mathbb{R}_+^*$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque. Les tableaux et les formes indéterminés sont exactement les mêmes que pour les suites. La rédaction est également la même.

Exemple 37. A noter : les fonctions polynômiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

c) Inverse

Définition 38. (i) Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. On dit qu'une fonction f admet 0 pour limite en a par valeurs positives, et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+, \text{ ou encore } \lim_{x\to a} f(x) = 0^+$$

si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \geq 0$.

(ii) Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. On dit qu'une fonction f admet 0 pour limite en a par valeurs négatives, et on note

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^-, \text{ ou encore } \lim_{x\to a} f(x) = 0^-$$

si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \leq 0$.

Exemple 39. À noter : cas de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en l'infini et en 0.

Proposition 40. *Soit a désignant un réel, une limite à droite ou a gauche, $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f une fonction admettant une limite en a. Alors, si $\dfrac{1}{f}$ est définie sur un voisinage de a, les cas non marqués F.I. du tableau ci-dessous donnent la limite de $\dfrac{1}{f}$ en a .*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}^*$	*0*	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x)$	$\dfrac{1}{l}$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Remarque. Pour le cas en 0, 0^+ ou 0^-, il suffit de retenir le graphe de la fonction inverse pour retrouver le raisonnement.

4. Composition et limites

Proposition 41. *Soient f et g deux fonctions réelles. Soit a désignant un réel, une limite à gauche ou a droite, $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ en a, et que g admet une limite l' en l. Alors, $g \circ f$ admet l' pour limite en a. Autrement dit, pour l et l' réels ou infinis et si les limites sont possibles, alors :*

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \\ g(x) \xrightarrow[x\to l]{} l' \end{cases} \implies g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'.$$

5. Limites classiques

a) Continuité

Proposition 42. *Toutes les fonctions usuelles, à l'exception de la partie entière, sont continues en tout point de leur domaine de définition. Ainsi, pour f une fonction polynomiale, la fonction logarithme népérien ou exponentielle, une fonction puissance éventuellement généralisée, ou la fonction valeur absolue, on a, notant D_f son domaine de définition :*

$$\forall x_0 \in D_f, f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0).$$

Remarque. La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Exemple 43. Calculons la limite de $x \mapsto e^{3x} - x^2 + 3\ln(2x)$ en 1.

b) Limites classiques au bords

Voici les limites classiques à connaitre :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair,} \\ -\infty \text{ sinon.}\end{cases}$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{-n} = 0$.

Si n pair, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^{-n} = +\infty$.

Si n impair, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^{-n} = -\infty$.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(v) $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = \lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

Exemple 44. A noter : limites de $x \mapsto x^\alpha$.

c) Levée des formes indéterminées

Pour lever les formes indéterminées, on appliquera la même stratégie que pour les suites (factoriser par le terme "imposant sa limite"), en utilisant la croissance comparée.

d) Croissance comparée

Proposition 45. *Soient α, β et γ trois réel strictement positifs. Alors :*

(i) $x^\beta \ln(x)^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\dfrac{ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{x^\beta}{ln(x)^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) $\dfrac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\dfrac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ *et* $x^\beta e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Exemple 46. Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{2^x}{x^4}$ en $+\infty$

e) Deux limites par taux d'accroissement

Proposition 47. *(i)* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration. A noter. □

Exemple 48. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

6. Compatibilité avec les suites

Proposition 49. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in \bar{I}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, u_n \in I.$$

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors :

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exemple 50. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n}$?

III. Théorèmes d'existence de limites

1. Existence par encadrement, par comparaison

Proposition 51. (Théorème des gendarmes) *Soit I un intervalle et $a \in \bar{I}$. Soient f, g et h des fonctions définie sur I. On suppose que :*

(i) Il existe un voisinage V de a tel que : $\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et

(ii) f et h admettent une limite en a, et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Alors, g admet une limite en a, et

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

Cet énoncé est toujours vrai si a désigne une limite à droite ou à gauche, ou si f, g et h sont définies sur $I \setminus \{a\}$ (mutatis mutandis).

Exemple 52. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \leq x$ et en déduire la limite de $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ en 0^+, puis en 0.

Proposition 53. ***(Théorème de comparaison)*** *Soit I un intervalle et $a \in \bar{I}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I.*
On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq g(x).$$

Alors :

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(ii) Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

2. Théorème de la limite monotone

Proposition 54. *Soit I un intervalle de borne inférieures et supérieures, respectivement, a et b. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors,*

(i) *f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$.*

(ii) *Si f est croissante. Alors :*

- *(a)* *Si f est majorée sur un voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b. Sinon, elle admet $+\infty$ comme limite en b.*
- *(b)* *Si f est minorée sur un voisinage de a, alors elle admet une limite finie en a. Sinon, elle admet $-\infty$ comme limite en a.*

(iii) *Si f est décroissante. Alors :*

- *(a)* *Si f est minorée sur un voisinage de b, alors elle admet une limite finie en b. Sinon, elle admet $-\infty$ comme limite en b.*
- *(b)* *Si f est majorée sur un voisinage de a, alors elle admet une limite finie en a. Sinon, elle admet $+\infty$ comme limite en a.*

Exemple 55. Illustration à noter.

Exemple 56. Exemple à noter.