Programme de colle n^o 13 : Limites de fonctions, introduction à la continuité

*Semaine du lundi **8 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Limites de fonctions (suite des définitions)

13.1 Étude d'une limite en un point par l'étude des limites à droite et à gauche en ce point. Fonction prolongeable par continuité en un point.

13.2 Voisinage de $\pm\infty$. Limite finie ou infinie d'une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On dit qu'un intervalle est un voisinage de $+\infty$ si sa borne supérieure est $+\infty$.

Énoncés généraux sur les limites

13.3 Notions de voisinage (voisinage d'un point, voisinage à droite ou à gauche d'un point, voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$). Unicité de la limite, notation lim. Si deux fonctions f et g coïncident sur un voisinage de x_0 et si g admet une limite l en x_0, alors f admet l pour limite en x_0.

Les voisinages d'un point ne sont pas épointés, les voisinages à droite ou à gauche le sont.

13.4 Passage à la limite des inégalités. Limites et sommes, limites et produits.

13.5 Limite nulle par valeurs positives ou négatives. Limite et inverse.

13.6 Limite et composition.

13.7 Limites classiques : les fonctions usuelles, à l'exception de la partie entière, sont continues en tout point de leurs domaines de définition. Limites aux bornes de l'intervalle de définition des fonctions usuelles. Théorème de croissante comparée. Deux limites par taux d'accroissement (exponentielle en 0 et logarithme en 1).

13.8 Théorème de composition d'une suite par une fonction ("compatibilité avec les suites") pour les limites.

Théorèmes d'existence de limites

13.9 Théorème des gendarmes, théorème de comparaison, théorème de la limite monotone.

Continuité, asymptote

13.10 Fonction continue sur une partie I de $\mathbb{R}$. Si I est un intervalle ouvert, alors I est un voisinage de chacun de ses points. Si f et g sont deux fonctions qui coïncident sur un intervalle ouvert I, alors f est continue sur I ssi g l'est. Méthode pour étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux.

Ces méthodes seront revues dans le chapitre dédié aux théorèmes sur la notion de continuité.

13.11 Asymptote horizontale, verticale, oblique. Détermination d'une éventuelle asymptote oblique d'une fonction réelle f définie sur un voisinage de l'infini considéré en étudiant la limite de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

Python

13.12 bibliothèque `matplotlib.pyplot` : tracé de suites et de courbes de fonctions.

Quelques questions de cours

1. Énoncer la proposition reliant une étude de limite en un point aux études des limites à droite et à gauche en ce point. Montrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.
2. Définir la notion de fonction prolongeable par continuité en un point. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.
3. Contextualiser et définir : f admet 0 pour limite en a par valeurs positives (resp. négatives). Tracer l'allure de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et donner *toutes* les notions de limites visibles sur ce graphe.
4. Énoncer le théorème de croissance comparée. Déterminer la limite de la suite $u = (\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n})_n$, en composant une suite par une fonction.
5. Donner les deux limites par taux d'accroissement présentées dans le cours. Démontrer celle du logarithme. Donner la limite en 0 de $x \mapsto (1 + \dfrac{1}{x})^x$.
6. Énoncer le théorème de la limite monotone (élèves : attention à la typo initialement présente sur le cours distribué pour ce théorème - version corrigée sur cahier de prépa).
7. Montrer qu'un intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points.
8. Montrer que $x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \frac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
9. Déterminer les asymptotes obliques de $x \mapsto \dfrac{e^x + 2x^2}{x+1}$.