Annexe (chapitre 10) : Continuité, recherche d'asymptotes

*Le **21/12**.*

Dans cette annexe, on explore un peu plus la notion de continuité, on voit un lemme majeur lié à la notion de voisinage, puis nous définissons les notions d'asymptotes.

1. Continuité sur un intervalle

On rappelle qu'une fonction f définie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est dite *continue en* x_0 si

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

Définition 1. Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur I.
On dit que f est *continue sur* I si pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0.

Exemple 2. (fil rouge) On va petit à petit montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (méthodes 1,2 et 3).

Exemple 3. Méthode 1 : Cette fonction est définie "par morceaux" à l'aide de fonctions usuelles continues. Notre étude se fera en deux temps :

1. On justifiera d'abord sa continuité en dehors des points de recollement (sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$.
2. On justifiera ensuite sa continuité en ces points de recollement (ici, -1 et 1).

a) Premier temps, et ajout important sur la notion de voisinage

Dans ce premier temps, on travaille sur chaque intervalle où f coïncide avec une fonction continue "par opérations sur les fonctions usuelles". Voici les énoncés nous permettant de le faire.

Proposition 4. *Soit I un intervalle ouvert. Alors, pour tout $x_0 \in I$, I est un voisinage de x_0.
Autrement dit, un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.*

Dans cette démonstration, pour simplifier l'écriture, on se permet d'utiliser les inégalités avec $-\infty$ et $+\infty$ (sans calculer avec les infinis pour autant).

Démonstration. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, avec $a < b$ (où a et b peuvent être infini). Soit $x_0 \in I$. Par définition de la notion de voisinage, on doit démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I.$$

Posons $d_1 = \dfrac{1}{2}|x_0 - a|$ si a est fini, et $d_1 = 1$ sinon. Montrons que dans tous les cas : $a < x_0 - d_1$.

Si $a = -\infty$, c'est évident par convention. Si a est fini,

$$a < x_0 - d_1 \iff a - x_0 < -d_1 \iff a - x_0 < -\frac{1}{2}|x_0 - a| \iff a - x_0 < \frac{1}{2}(a - x_0)$$

Cette dernière inégalité est vraie, car $a < x_0$ (car $x_0 \in I$) donc $a - x_0 < 0$.

Posons $d_2 = \dfrac{1}{2}|x_0 - b|$ si b est fini, et $d_2 = 1$ sinon, de sorte que dans tous les cas : $x_0 + d_2 < b$ (démonstration analogue).

Posons enfin $\delta = \min(d_1, d_2)$ de sorte que $\delta \leq d_1$ et $\delta \leq d_2$. Alors,

$$a < x_0 - d_1 \leq x_0 - \delta \leq x_0 + \delta \leq x_0 + d_2 < b$$

montre que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$, d'où le résultat. $\square$

Remarque. En pratique, dans l'énorme majorité des cas, c'est cet énoncé que vous utiliserez pour vérifier qu'une partie donnée de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point (il suffira que cette partie soit un intervalle ouvert contenant ce point).

Cela permet donc de travailler sur un intervalle ouvert I pour déduire des résultats sur des limites de fonctions en tout point de I.

Proposition 5. *Soit f et g deux fonctions réelles. Soit I un intervalle* **ouvert**. *On suppose que f et g coïncident sur I, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Alors, f et continue sur I si et seulement si g est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Les rôles de f et g étant symétriques, montrons que si g est continue sur I, alors f l'est aussi.

Soit $x_0 \in I$. I étant un intervalle ouvert, c'est un voisinage de x_0. On a par hypothèse :

$$\forall x \in I, f(x) = g(x)$$

et par continuité de g sur I, donc en x_0 :

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$$

Par théorème (I étant un voisinage de x_0) :

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0) = f(x_0)$$

donc f est continue en x_0.

On a donc démontré que f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$. Par définition, f est continue sur I. $\square$

Exemple 6. Méthode 2 : Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est continue sur $]-\infty, -1[$ (on appliquerait une démarche similaire pour les autres intervalles).

b) Second temps

Exemple 7. Méthode 3 : Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 1 - \dfrac{1}{2x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est continue en -1 (on appliquerait une démarche similaire pour sa continuité en 1).

Exemple 8. (Fin du fil rouge) On peut maintenant conclure notre étude de la continuité de cette fonction f.

2. Asymptotes

a) Asymptotes horizontales et verticales

Définition 9. Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet une asymptote verticale à droite (resp. à gauche) d'équation $x = x_0$ si f admet une limite infinie à droite (resp. à gauche) en x_0. Dans ce cas, on dit aussi que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote de f à droite (resp. à gauche).
On dit que f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ si la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote de f à droite et à gauche.

Définition 10. Soit I un voisinage de $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$$

(resp. $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l$).

Remarque. Ces notions d'asymptotes concernent donc toujours les limites de f en chaque extrémité de son domaine de définition.

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x-1}$. Donner les asymptotes verticales et horizontales de f. Dessin à noter.

Remarque. Ces notions permettent de préciser le tracé d'un graphe.

b) Asymptotes obliques

Définition 12. Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit a et b deux réels.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si :

$$f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

(resp. $f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$).

Remarque. Si $a \neq 0$ dans la définition ci-dessus, l'asymptote d'équation $y = ax + b$ n'est pas une droite verticale ou horizontale, d'où la terminologie d'asymptote oblique.

Remarque. Interprétation graphique : à noter.

Pour déterminer une éventuelle asymptote (oblique), on utilisera la méthode découlant de la proposition suivante (énoncée en $+\infty$ ici).

Proposition 13. *Soit I un intervalle qui est un voisinage de $+\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit a et b deux réels.*
Alors, la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote de f en $+\infty$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
1. $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a$, *et*
2. $f(x) - ax \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$

La même proposition est vraie en remplaçant partout "$+\infty$" par "$-\infty$".

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 14. Méthode : Pour déterminer les éventuelles asymptotes d'une fonction, on sépare l'étude en chaque borne infinie du domaine de définition de f, et on utilise directement cette proposition dans chaque cas.

Déterminons les éventuelles asymptotes obliques de $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 2x^2}{x+1}$.