TD de mathématiques n°10 : Limites de fonctions, continuité en un point

Exercices

Calculs de limites

Exercice 1 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$, puis déterminer, si elles existent, les éventuelles limites à toutes les extrémités du domaine de définition.*

(a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

(b) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

(d) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$

(f) $f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$

(g) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$

(h) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

(i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

(j) $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$

(k) $f(x) = \ln(1+e^x) - x$

(l) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

(m) $f(x) = \sqrt{x^2-x+1} - x$

(n) $f(x) = e^x\ln(1+e^{-x})$

(o) $f(x) = \ln(x+e^{-x})$

(p) $f(x) = \ln\left(x^2-5x+6\right)$

(q) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(r) $f(x) = \ln\left(\left|x^2-3x+2\right|\right)$

(s) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x\ln x}$

(t) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(u) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(v) $f(x) = \ln(e^x-x-1)$

(w) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(x) $f(x) = \ln(|e^x-e^{-x}|)$

(y) $f(x) = \frac{\ln x+x-1}{x+e^{-x}}$

(z) $f(x) = x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 2 *Déterminer les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :*

(a) $f(x) = \frac{3x+2}{7x-5}$

(b) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{3(x+1)}$

(c) $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$

(g) $f(x) = x\ln(1+e^{-x})$

(h) $f(x) = \frac{x^2+e^x}{x+1}$

(i) $f(x) = x + \ln(2+e^x)$

Continuité en un point

Exercice 3 *La fonction*

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 4 *La fonction*

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ 1+x \text{ si } x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 5 *La fonction*

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x\geq 1 \\ x \text{ si } x<1 \end{cases} \end{array}\right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 6 *La fonction*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x \geq 1 \\ x - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 7 *Montrer que la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{array}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 8 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, *on pose* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(*a*) *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en 0 .*

(*b*) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, *calculer* $f'(x)$, *puis montrer que* f' *est prolongeable par continuité en 0 .*

Exercice 9 *La fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 10 *Montrer que la fonction* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = x^x$ *est prolongeable par continuité en 0 . Quelle convention calculatoire ce résultat permet-il de justifier?*