Chapitre 11 : Espaces probabilisés finis

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Espace probabilisable fini

1. Expérience aléatoire : univers et événement

On appelle *expérience aléatoire* tout phénomène qu'on décide d'étudier en lui attribuant une notion de hasard, que l'on quantifie par la notion de probabilité.

Étant donné une expérience aléatoire, la première étape de *modélisation* consiste à attribuer un ensemble appelé **univers** à cette expérience aléatoire. L'univers représente (en première approximation) l'ensemble des résultats possibles (ou ensemble des résultats observables, ou ensemble des issues) de l'expérience aléatoire.

Un **événement** est, intuitivement, un constat pouvant être vrai ou faux sur le résultat de l'expérience. L'un des enjeux de la paire statistiques/probabilités est de pouvoir faire des prévisions en calculant la probabilité d'événements (plus de détails dans le chapitre sur les statistiques) à partir de données récoltées dans le monde réel. On peut dire grossièrement que l'un des enjeux de la théorie des probabilités est de calculer la probabilité d'événements.

Exemple 1. (i) On lance un dé à 6 faces plusieurs fois de suite. Ce dés est lancé toujours de la même manière, à l'aide d'un mécanisme précis, aucun paramètre ne change d'un lancé à l'autre (il est toujours posé sur la même face au départ, par exemple). Il tombera donc toujours sur la même face... Ceci n'est pas un cadre dans lequel on invoquera la théorie des probabilités, il semble ici plus judicieux de rapprocher cette expérience d'un exercice de mécanique.

(ii) On lance un dé à 6 faces et on note la face obtenue. Implicitement, si l'on n'affirme que ça, c'est qu'on fait appelle au caractère imprévisible du dé, et on va donc modéliser ce lancer à l'aide de la théorie des probabilités. L'univers associé à cette expérience aléatoire est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(iii) On lance successivement deux dés à 6 faces, et on note les faces obtenues, dans l'ordre. L'univers Ω modélisant cette expérience aléatoire est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(iv) On lance successivement deux dés à 6 faces, et on note la somme des deux faces obtenues. L'univers Ω modélisant cette expérience est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(v) On lance une pièce à pile ou face. On modélise l'expérience aléatoire par l'univers : $\Omega =$

ou encore,

$\Omega =$

Des événements sont :

(*vi*) On lance 10 fois de suite une pièce à pile ou face, et on note les résultats obtenus dans l'ordre. L'un des univers permettant de modéliser ce problème est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(*vii*) Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire ces 3 boules, sans remise, et on note l'ordre dans lequel ces boules ont été obtenues. L'univers à considérer est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(*viii*) On mesure la quantité d'eau tombée de la pluie en une journée (en L/m^2). Vue la relative fiabilité des prévisions météo, on décide de modéliser cela comme une expérience aléatoire. L'univers que l'on peut associer à cette expérience aléatoire est :

$\Omega =$

Des événements sont :

(*ix*) On lance une pièce à pile ou face, jusqu'à faire pile pour la première fois, et on note le nombre d'essais qui ont été nécessaires. On peut alors considérer l'univers :

$\Omega =$

Des événements sont :

(*x*) On lance indéfiniment une pièce à pile ou face (un peu d'imagination !). L'ensemble des résultats observables est :

$\Omega =$

Des événements sont :

Remarque. En fait, il y a un choix quand on considère l'univers. Et plus tard, on verra que les probabilités se détachent un peu de cette notion d'univers afin, justement, de se défaire de ce choix possible.

Par exemple, prenons l'expérience consistant à lancer deux dés à 6 faces, et à s'intéresser à la somme des deux faces obtenues. On aurait pu déclarer considérer l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ (on dit alors que les résultats observables sont toutes les possibilités de résultats des deux dés) et considérer la somme des faces à l'aide d'événements.

Remarque. L'univers peut être un ensemble fini (comme pour les dés), ou infini (rang du premier pile dans une suite de pile ou face, mesure du niveau d'eau...) et potentiellement très compliqué.

Dans ce chapitre introductif aux probabilités, on ne s'intéressera qu'aux expérience aléatoires à univers fini.

Remarque. Pour parler d'événements, on considérera qu'un événement est l'ensemble des issues qui le réalisent. Ainsi, on modélise toujours la notion d'événement par une partie de Ω. Dans ce chapitre, où Ω est un ensemble fini, les événements sont exactement les parties de Ω.

2. Espace probabilisable fini

En fait, dans le cas d'un univers Ω fini, un événement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω.

Définition 2. On appelle espace probabilisable fini la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini non vide, appelé univers, et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, appelé ensemble des événements.
Une partie de Ω est appelée un événement. On appelle événement élémentaire toute partie de Ω de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$.

Remarque. Les événements élémentaires sont donc les événements qui sont des singletons. Ils correspondent aux issues, mais sont distincts des issues, qui sont les éléments ω de Ω.

Remarque. Soit A un événement d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, et $\omega \in \Omega$ une issue. Si $\omega \in A$, on dit que l'issue ω réalise l'événement A.

Remarque. Modéliser une expérience aléatoire consiste donc, dans un premier temps, à lui attribuer un univers (fini dans ce chapitre), donc un espace probabilisable fini.

3. Opérations sur les événements

Définition 3. Soient A et B deux événement d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

- (i) On dit que A est l'événement certain si $A = \Omega$.
- (ii) On dit que A est l'événement impossible si $A = \emptyset$.
- (iii) L'union de A et B est l'événement $A \cup B$.
- (iv) L'intersection de A et B est l'événement $A \cap B$.
- (v) L'événement contraire de l'événement A est l'événement $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- (vi) On dit que l'événement A implique l'événement B si $A \subset B$.
- (vii) On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

On a ainsi un vocabulaire propre aux événements qui correspond aux opérations ensemblistes.

l'événement A	A
A est l'événement certain	$A = \Omega$
A est l'événement impossible	$A = \emptyset$
l'événement A et B	$A \cap B$
l'événement A ou B	$A \cup B$
l'événement contraire de A	$\bar{A}$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
l'événement A implique l'événement B	$A \subset B$

Exemple 4. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer 2 dés à 6 faces et à noter, dans l'ordre, les résultats obtenus. On modélise cette expérience par l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ qui donne l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

- (i) Donner 2 événements et leurs événements contraires.
- (ii) Donner deux événements incompatibles.
- (iii) On considère les événements A : " au moins un dé tombe sur une face paire " et B :" au moins un dé tombe sur une face impaire ". Expliciter l'événement A et B.

Exercice 5. On lance deux pièces successivement. On considère l'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. On note A l'événement "la première pièce fait pile", et B l'événement " la seconde pièce fait pile". Décrire les événements :

$$A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}, A \setminus B.$$

Remarque. Si A est un événement, alors les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles. En effet, $A \cap \bar{A} = \emptyset$. De plus, l'événement "$A$ ou $\bar{A}$" est l'événement certain.

4. Système complet d'événements

Définition 6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille d'événements d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
On dit que $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ est un système complet d'événements si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(i) les événements $A_1, \dots, A_m$ sont deux à deux incompatibles, i.e. :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\Omega = \bigcup\limits_{i\in[\![1,m]\!]} A_i$.

Remarque. Une famille d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ n'est rien d'autre que la donnée de m événements $A_1, \dots, A_m$.

Remarque. La définition s'adapte immédiatement à n'importe quelle famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble (fini ici), comme on le fera dans un chapitre ultérieur.

Exemple 7. Pour un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on peut toujours considérer ces systèmes complets d'événements :

(i) $(\emptyset, \Omega)$ est un système complet d'événement.

(ii) Pour tout événement A, $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événement. En effet, $A \cup \bar{A} = \Omega$, et A est bien disjoint de $\bar{A}$.

Exemple 8. Donner un système complet d'événement à 3 événements pour l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés à 6 faces et à noter les résultats, dans l'ordre.

Définition 9. Soient $m \geq 2$ un entier, et $A_1, \dots, A_m$ des parties d'un ensemble Ω. On dit que la réunion $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ est une <u>réunion disjointe</u> si les ensembles $A_1, \dots, A_m$ sont deux à deux disjoints.
Dans ce cas, on note :

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Exemple 10. Soit $(A_1, \dots, A_m)$ un système complet d'événements d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Alors d'après les définitions ci-dessus :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Remarque. On utilisera souvent le fait suivant : Soit $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement B, on a $B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B \cap A_i$ et la réunion est disjointe :

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{m} B \cap A_i.$$

Ceci sera démontré pour la formule des probabilités totales.

II. Espace probabilisé fini

Maintenant qu'on a modélisé une expérience aléatoire et ses événements par un univers, on va ajouter une notion de probabilité, qui quantifie le hasard de l'expérience.

1. Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 11. On appelle probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(*i*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(*ii*) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 12. On appelle espace probabilisé fini tout triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Étant donné un tel espace probabilisé fini et A un de ses événements, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé la probabilité de A.

Remarque. Un point important des définitions ci-dessus : l'ensemble d'arrivée de $\mathbb{P}$ est $[0,1]$. Donc la probabilité d'un événement est toujours un réel entre 0 et 1, par définition.

Remarque. Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer un espace probabilisé. Cela consiste toujours à d'abord donner l'univers (donc l'espace probabilisable fini, ici). Il faut ensuite donner la probabilité, point qui sera admis dans la majorité des cas *sauf* dans les situations d'équiprobabilités (voir plus tard).

Exemple 13. On lance deux dés déséquilibrés et on note leurs résultats. On donne : la face 1 tombe avec une probabilité 1/2 sur chaque dé, les autres faces tombent avec probabilité 1/10, et les deux lancers sont indépendants. On considère donc l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On admettra l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$\mathbb{P}($“ le premier dé fait 1 ”$) = \mathbb{P}($“ le second dé fait 1 ”$) = 1/2$, et

$\mathbb{P}($“ le dé numéro i fait j ”$) = 1/10$ pour $i \in \{1,2\}, j \in [\![2,5]\!]$, et (voir plus tard)

les résultats des deux dés sont indépendants.

Remarque. La définition d'une probabilité est à connaitre sur le bout des doigts, ainsi que les propriétés que nous verrons plus bas. On retiendra donc bien qu'une probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

(*i*) $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$,

(*ii*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(*iii*) $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour A et B des événements incompatibles.

Voici une conséquence directe de la définition que nous utiliserons très souvent.

Proposition 14. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. Par récurrence (exercice). □

On en déduit, dans le cas des probabilités sur un univers fini, le fait suivant :

Proposition 15. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soit* A *un événement donné par*

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

où $n = \mathrm{Card}(A)$ *de sorte que* $x_1, \ldots, x_n$ *sont les éléments deux à deux distincts de* A*. Alors,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{x_i\}).$$

En particulier,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$

Démonstration. A noter □

2. Probabilités et événements élémentaires dans un espace probabilisable fini, équiprobabilité.

Attention, la proposition suivante est bien pratique pour les espaces probabilisés finis, mais est **très fausse** pour les univers infinis que nous serons menés à considérer plus tard.

Proposition 16. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. Posons* $n = \mathrm{Card}(\Omega)$ *et soient* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *les éléments (deux à deux distincts) de* Ω*.*
Soient $p_1, \ldots, p_n$ *des éléments de* $[0, 1]$ *tels que :*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *telle que :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Remarque. Autrement dit, une probabilité **sur un univers fini** (abus de langage toléré) est uniquement déterminée par la probabilité des événements élémentaires, et on peut définir une telle probabilité en donnant sa valeur sur les événements élémentaires à condition que la somme des ces probabilités (positives) soit 1.

Démonstration. A noter □

On peut appliquer cette propriété pour obtenir une probabilité sur tout univers fini, appelée probabilité uniforme. C'est l'unique probabilité déterminée par le fait que chaque événement élémentaire est réalisé avec la même probabilité. Si Ω est un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on applique pour cela la propriété ci-dessus avec

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n},$$

ce qui est le seul choix possible pour avoir tous les p_i égaux, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On a donc:

Définition 17. *(et proposition)*
Soit Ω un univers fini. Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que tous les événements élémentaires aient la même probabilité.
Elle est caractérisée par $\forall w \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.
Cette probabilité est appelée la probabilité uniforme sur Ω et est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Démonstration. A noter □

Remarque. On dit qu'une expérience aléatoire est en situation d'équiprobabilité quand toutes ses issues ont la même chance d'arriver. Cela peut-être parce qu'un dé est équilibré, parce qu'une pièce n'est pas truquée pour un pile ou face, parce que l'on tire des boules numérotées de 1 à n à l'aveugle et que tous les numéros apparaissent le même nombre de fois sur nos boules (loto)... Dans ce cas, la modélisation de l'expérience aléatoire consiste à déterminer l'univers, et à considérer la probabilité uniforme sur l'espace probabilisable obtenu.

Exemple 18. (Nombreux) exemples à noter.

Exemple 19. Donner un espace probabilisé associé au lancer d'un dé à 6 face qui est déséquilibré de sorte que les faces paires ont deux fois plus de chances de tomber que les faces impaires (les faces paires, ou impaires, tombant avec une même probabilité). Déterminer la probabilité de tomber sur l'une des faces 4, 5 ou 6.

Remarque. En situation d'équiprobabilité, déterminer la probabilité d'un événement consiste donc à déterminer son cardinal, donc à faire du dénombrement.

Exemple 20. On lance deux dés à 6 faces équilibrés, et on note les deux résultats obtenus. Modéliser le problème, et déterminer la probabilité de n'obtenir aucun 6. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un 6.

Exercice 21. On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir une paire d'as?

Exercice 22. Commenter l'article ci-dessous du site *midilibre.fr* publié le 17/11/2022 à 15:37.

> C'était son jour. Un joueur du Loto en Suisse a eu l'immense chance de remporter 1 million de francs suisses, soit environ 1,02 million d'euros, en cochant sur sa grille une série de nombres totalement improbable.
>
> Car, comme le rapporte Swssinfo, ce dernier a gagné le gros avec une série nombres qui se suivent quasi tous (4, 28, 29, 30, 31 et 32, avec le 1 en numéro chance). Une combinaison qui avait très peu de chance en termes de probabilités de tomber au tirage.

Dans le cas de la probabilité uniforme, on voit qu'un calcul de probabilité revient à un calcul de cardinal. En fait, le parallèle va plus loin : cardinal et probabilités vérifient beaucoup de propriétés en commun.

3. Propriétés des probabilités

Nous avons déjà vu trois propriétés fondamentales des probabilités finies formant une suite de déductions:

(*i*) La probabilité d'une réunion d'événements incompatibles est la somme des probabilités des événements,

(*ii*) la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient,

(*iii*) une probabilité sur un univers fini est déterminée par la probabilité de chaque événement élémentaire.

Proposition 23. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Alors :*

(i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. *(croissance pour l'inclusion)*

(iv) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. *(~~cardinal~~ probabilité d'une réunion)*

(v) $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$, *(formule du crible de Poincaré)*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C)\\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Démonstration. À noter □

Exercice 24. Dans un groupe, 20% des gens parlent anglais, 38% parlent russe, 26% parlent chinois, 3% parlent anglais et chinois, 2% parlent les trois langues, et 4% parlent russe et chinois et 2% parlent anglais et russe. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ne parle aucune de ces langues?

Enfin, cette proposition (et sa variante plus loin) est utilisé dans **quasiment tous** les exercices de probabilités des chapitres ultérieurs.

Proposition 25. ***(Formule des probabilités totales** sans conditionnement)*
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soit* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ *un système complet d'événements. Alors, pour tout événement* B *:*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Démonstration. A noter. □

Exemple 26. On étudie l'immunité à une maladie dans une population. 30% des individus ont été affecté par cette maladie pendant l'enfance et sont immunisés. 70% des individus sont immunisés. On tire un individu au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit immunisé sans avoir été affecté par cette maladie pendant son enfance?

III. Probabilités conditionnelles

1. Généralités

Idée. On s'intéresse à la probabilité qu'un événement B soit réalisé. On sait de plus que, dans notre cas, un événement A est réalisé. Quelle est la probabilité que l'événement B se réalise, prenant cette information supplémentaire compte?

Définition 27. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Si B est un événement, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le réel noté $\mathbb{P}_A(B)$ donné par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque. On trouve aussi la notation $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$, qu'on lira "probabilité de B sachant A.

Remarque. Attention, ette notion de probabilité "sachant A" n'est définie que pour les événements A de probabilité non nulle.

Remarque. Les probabilités étant interprétées comme des fréquences théoriques de réalisation des événements, la proportionnalité indique bien que le réel $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de voir l'événement B se réaliser dans les cas où l'événement A l'est.

Remarque. On peut facilement se convaincre de ce dernier point en considérant une situation d'équiprobabilité sur un univers fini. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur un univers fini Ω, et A un événement de probabilité non nulle, c'est-à-dire (vue la définition de la probabilité uniforme) non vide. Alors pour tout événement B:

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(A)}.$$

On obtient bien la probabilité de l'événement :
sur l'univers :
muni de la probabilité

Exemple 28. On considère le résultat d'un dé à 6 faces équilibré. On note les événements :

A : “Obtenir un résultat inférieur ou égal à 3”,

B : “Obtenir un 5”,

C : “Obtenir un 2”.

Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(C)$.

Idée. Comment calculer avec les probabilités conditionnelles? Voici une proposition fondamentale.

Proposition 29. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(A), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors, l'application*

$$\mathbb{P}_A : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, appelée probabilité conditionnelle sachant A.

Démonstration. A noter $\square$

Ceci permet d'obtenir directement toutes les propriétés connues sur une probabilité pour les probabilités conditionnelles. Corollaire :

Proposition 30. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini). Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors :*

(i) $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$, *et* $\mathbb{P}_A(\emptyset) = 0$.

(ii) Si $B_1, \dots, B_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}_A(B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_A(B_k)$$

(iii) Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

(iv) Si B et B' sont des événements tels que $B \subset B'$, alors $\mathbb{P}_A(B) \leq \mathbb{P}_A(B')$.

(v) Pour tous événements B et C :

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$$

(vi) La formule du crible de Poincaré est vraie pour $\mathbb{P}_A$.

Remarque. De même, la proposition 15 sur les espaces probabilisés finis est vraie pour $\mathbb{P}_A$.

Les probabilités conditionnelles sont très utiles pour interpréter des situations.

Exemple 31. On dispose de 100 dés à 6 faces, dont 20 sont déséquilibrés de tel sorte que la face 1 tombe avec probabilité $\frac{1}{2}$ (et les autres dés sont équilibrés). On prends un dé au hasard, et on le lance. On note U l'événement “On obtient le numéro 1” et D l'événement “On pioche un dé déséquilibré”. Alors :
$\mathbb{P}_D(U) =$

$\mathbb{P}_D(\bar{U}) =$

$\mathbb{P}_{\bar{D}}(U) =$

Idée. En pratique, les probabilités conditionnelles permettent de faire des raisonnements comportant des étapes, comme dans l'exemple ci-dessus. Cela s'incarne à travers deux formules : la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

2. La formule des probabilités composées

Proposition 32. ***(Formule des probabilités composées au rang 2)***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B).$$

Démonstration. Immédiat avec la définition de $\mathbb{P}_A$ (assurez-vous d'avoir compris). □

Exemple 33. Reprenons l'exemple 11 ci-dessus. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un 1 ET d'avoir tiré un dé déséquilibré? Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 1 ET d'avoir tiré un dé équilibré?
$\mathbb{P}(D \cap U) =$

$\mathbb{P}(\bar{D} \cap U) =$

Cette formule se généralise de suite.

Proposition 34. ***(Formule des probabilités composées)***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $m \geq 2$ un entier, et soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements telle que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \neq 0.$$

Alors:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

Démonstration. A noter. □

Exercice 35. Compléter pour reformuler la conclusion de la formule des probabilités composées. Avec les notations et hypothèses de la proposition 34, on obtient :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^{m} \mathbb{P}_{\bigcap_{j=} A_j} (A \quad)$$

Exemple 36. Une urne contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement 3 boules au hasard, sans remise, et on note les couleurs des boules obtenues.

(*i*) Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soient blanches?

(*ii*) Quelle est la probabilité qu'on tire pour la première fois une boule noire au 2e tirage?

3. La formule des probabilités totales avec conditionnement

Proposition 37. ***(Formule des probabilités totales avec conditionnement)***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \mathbb{P}(A_i) \neq 0.$$

Alors, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Remarque. La première égalité est la formule des probabilités totales sans conditionnement déjà vue. La formule avec conditionnement utilise juste les probabilités conditionnelles pour exprimer les probabilités des intersections. Pour le faire, on doit rajouter l'hypothèse permettant d'écrire ces probabilités.

Démonstration. A noter. □

Exemple 38. Prenons la suite des exemples 31 et 33 : sur 100 dés, 20 sont déséquilibrés et tombent sur la face 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, les autres sont équilibrés. On tire un dé au hasard, on le lance et on note la face obtenue. Quelle est la probabilité de tomber sur une face 1? De tomber sur une autre face que 1?

Remarque. Cas particulier important : Soit A un événement d'un espace probabilisé. Alors, la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événement. On peut donc l'utiliser dans la formule des probabilités totales, à condition que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, c'est-à-dire si A n'est ni l'événement certain, ni l'événement impossible. Dans ce cas, on obtient pour tout événement B:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B).}$$

Exemple 39. Prenons la suite de l'exemple 36 ci-dessus. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au 2e tirage?

Exercice 40. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au 3e tirage? On considérera un système complet d'événements à 4 événements, correspondants aux 4 tirages possibles pour les 2 premières boules.

Exemple 41. On lance un dé équilibré à 6 faces. On note k le numéro de la face obtenu, puis on tire k boules simultanément dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule numéro 6?

Remarque. Rédaction : quand on utilise une formule des probabilités totales, on mentionnera explicitement le système complet d'événement utilisé, ainsi que la vérification nécessaire pour la formule avec conditionnement (les événements du SCE doivent être de probabilité non nulle).

4. La formule de Bayes

Idée. La formule de Bayes permet en un certain sens de retourner une probabilité conditionnelle. On l'appelle la formule des causes, car elle permet de retrouver la probabilité d'une cause sachant qu'une de ses conséquence a eu lieu.

La formule de Bayes part du constat suivant : soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Supposons $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$$

Proposition 42. ***(Formules de Bayes)***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

(i) Pour tous événements A et B de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

(ii) Soit $(A_1, \dots A_m)$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1, m]\!], \mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Démonstration. A noter □

Remarque. Cas particulier important Soit A est un événement. Alors le point (ii) appliqué au système complet d'événements $(A, \bar{A})$ donne le résultat suivant.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}}$$

Exemple 43. Une urne contient deux dés. L'un est équilibré, l'autre n'a que des faces 6. On pioche un dé au hasard, que l'on lance, et on note la face obtenue. Réalisant cette expérience, on obtient un 6. Quelle est la probabilité d'avoir pioché le dé équilibré?

Exemple 44. Dans une population, on étudie une maladie qui touche environ une personne sur 10000. Un groupe pharmaceutique propose un test de dépistage en donnant les caractéristiques suivantes :

- Si une personne est malade, le test est positif à 99%.
- Il y a 0,1% de faux positifs, c'est à dire de test positifs sur une personne saine.

Autoriseriez-vous la commercialisation de ce test? On regardera la probabilité qu'une personne soit malade sachant son test positif.

IV. Indépendance

1. Indépendance de deux événements

Idée. Deux événements sont indépendants quand il n'y a pas de corrélation entre leurs réalisations. Autrement dit, savoir que l'un est réalisé n'apporte pas d'information supplémentaire sur la réalisation de l'autre.

Définition 45. Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ sont dits indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarque. La définition est symétrique : A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si et seulement si B et A le sont.

Remarque. Deux événements sont indépendants **pour une probabilité donnée**. La définition de l'indépendance est sur un espace probabilisé. C'est un point important, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 46. On dispose de deux dé, l'un est équilibré et l'autre n'a que des faces 1. On considère l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Le premier dé donne la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω, et le second donne la probabilité notée $\tilde{\mathbb{P}}$ déterminée par :
$$\tilde{\mathbb{P}}(\{1\}) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![2, 6]\!], \tilde{\mathbb{P}}(\{j\}) = 0.$$
On considère les événements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{5, 6\}$. Alors :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \qquad\qquad\qquad \text{et } \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) =$$
donc pour la probabilité $\mathbb{P}$, les événements A et B ...

De plus,
$$\tilde{\mathbb{P}}(A \cap B) = \qquad\qquad\qquad \text{et } \tilde{\mathbb{P}}(A)\tilde{\mathbb{P}}(B) =$$
donc pour la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$, les événements A et B ....

Proposition 47. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors, il est équivalent de dire :*
- *(i) A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$, et*
- *(ii) $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*

Démonstration. A noter □

Remarque. Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on obtient donc :
$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour } \mathbb{P} \iff \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \iff \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B).$$

Remarque. On lance deux dés successivement (*et souvent, sera mentionné :* de manière indépendante) et on note les résultats obtenus. Vue la nature de l'expérience aléatoire, on peut considérer que les événements " le premier dé tombe sur 1" et "le second dé tombe sur une face paire" sont indépendants (pour la probabilité envisagée). Ici, on peut aussi le redémontrer si l'énoncé ne le précise pas.

Remarque. Même si la notion d'indépendance dépend de la probabilité utilisée, quand le contexte est clair on ne le précise plus.

Exemple 48. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6, on en pioche deux sans remise. Les événements "la première boule tirée est paire" et "la 2e boule tirée est la numéro 3" sont-ils indépendants?

Exemple 49. On lance un dé équilibré à 6 faces. Les événements A : "on obtient une face paire" et B : "on obtient un 3 ou un 6" sont-ils indépendants?

Remarque. **Ne pas confondre** indépendance et incompatibilité. Aucune implication directe entre ces deux notions n'est vraie.

Proposition 50. *Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.*
Si A et B sont indépendants (pour $\mathbb{P}$), alors A et $\bar{B}$ sont indépendants (pour $\mathbb{P}$).

Démonstration. A noter. □

Remarque. En appliquant cette proposition à la chaine, on obtient aussi que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants, puis $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

2. Indépendance deux à deux, indépendance mutuelle

Définition 51. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $m \in \mathbb{N}^*$ et et $(A_i)_{A \leq i \leq m}$ une famille d'événements.

(i) On dit que les événements $A_1, \ldots, A_m$ sont deux à deux indépendants (pour $\mathbb{P}$) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2, i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

(ii) On dit que les événements $A_1 \ldots, A_m$ sont mutuellement indépendants (pour $\mathbb{P}$) si :

$$\forall J \subset [\![1, m]\!], \mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Remarque. L'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle ne doivent pas être confondues. Par exemple, trois événements A_1, A_2, A_3 sont :

(i) deux à deux indépendants pour $\mathbb{P}$ si :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \end{aligned}$$

(ii) mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}$ si :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \end{aligned}$$

On remarque que des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exemple 52. On lance deux dés à 6 faces équilibrés et on note les résultats. On considère les événements :

A : “le résultat du premier dé est pair”,

B : “le résultat du second dé est pair”,

C : “la somme des résultats est paire”.

A, B et C sont-ils deux à deux indépendants? Sont-ils mutuellement indépendants?

Proposition 53. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et pour $m \geq 2$, $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements.*
Soit $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$ pour tout entier $i \in [\![1, m]\!]$.

(i) Si les événements $A_1, \ldots A_m$ sont deux à deux indépendants, alors les événements $B_1, \ldots, B_m$ sont deux à deux indépendants.

(ii) Si les événements $A_1, \ldots A_m$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $B_1, \ldots, B_m$ sont mutuellement indépendants.

Remarque. Par exemple, si A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3$.

Démonstration. À noter $\square$

Idée. L'indépendance mutuelle est plus difficile à vérifier. En contrepartie, c'est une notion plus souple, c'est-à-dire qui donne plus d'outils, comme le montre l'exercice suivant.

Proposition 54. *Soient A, B et C trois événements mutuellement indépendants (pour une probabilité $\mathbb{P}$). Alors, A et $B \cup C$ sont indépendants.*

Démonstration. En exercice obligatoire. $\square$

Exercice 55. (Contre exemple) Les événements A, B et C de l'exemple 22 sont deux à deux indépendants. A et $B \cup C$ sont-ils indépendants?