

EXERCICES DU CHAPITRE 1

I – Calcul dans $\mathbb{R}$

Exercice I.1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$$

Exercice I.2. Soient 3 nombres réels x, y et z .

- (1) Montrer l'inégalité : $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- (2) En déduire l'inégalité : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Exercice I.3. Dans tout l'exercice, on fixe deux nombres réels x, y tels que $0 < x \leq y$.

- (1) Montrer que : $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2}$.
- (2) Montrer que : $(x-y)^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \times (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$.
- (3) Montrer que : $4x \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 4y$. *Indication : il faut montrer successivement chacune des deux inégalités.*
- (4) Déduire des trois questions précédentes l'encadrement :

$$\frac{(x-y)^2}{8y} \leq \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{(x-y)^2}{8x}.$$

Indication : ici par exemple, il n'est pas nécessaire d'avoir réussi les questions précédentes pour répondre à celle-ci.

Exercice I.4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|x-1| \cdot |x+2| < 3$

Exercice I.5. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

- | | |
|--|-----------------------------|
| (1) $ x = -2$ | (4) $ 4x+6 \leq 1$ |
| (2) $ 2x+3 = 6x-1 $ | (5) $ 2x+1 \geq -1$ |
| (3) $\left \frac{x+1}{x-3} \right - 3 = 0$ | (6) $ x+2 + x = 5 + x-3 $ |

La dernière équation est un peu plus sournoise. Le plus simple est de se "débarrasser" des valeurs absolues en utilisant :

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Idem pour $|x-3|$.

Et on résout alors l'équation sur chacun des intervalles que cela aura découpé.

II – Principe de récurrence

Exercice II.1. (1) Montrer qu'à partir d'un certain rang (entier), $2n+1 \leq 2^n$.
(2) Montrer qu'à partir d'un certain rang (entier), $n^2 \leq 2^n$.

Exercice II.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2 ; \quad u_1 = 6 ; \quad u_{n+2} = 3^n u_{n+1} - 5^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que tous les termes de cette suite sont pairs.

Exercice II.3. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 2^n + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice II.4. Montrer par récurrence sur n que :

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice II.5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f : x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$. Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

est bien définie et que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III – Sommes

Exercice III.1. (1) Réécrire les sommes suivantes sans utiliser le symbole $\sum$:

(a) $\sum_{k \in [-1, 4]} k(k+1)$. (b) $\sum_{(i,j) \in \llbracket 0,3 \rrbracket \times \llbracket 2,3 \rrbracket} i(j+1)$

(2) Réécrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:

(a) $-1 + 2 + 5 + 8$ (b) $1^2 + 2^2 + \dots + N^2$

(c) $|1-3| + |2-3| + |3-3| + |4-3| + |1-4| + |2-4| + |3-4| + |4-4| + |1-5| + |2-5| + |3-5| + |4-5|$

Exercice III.2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice III.3. Soit $0 \leq p \leq n$ deux entiers et $q \neq 1$. Montrer que $\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice III.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme : $\sum_{k=-n}^n (k+1)$.

Exercice III.5. On note $S_n = \sum_{k=1}^n k$.

- (1) Exprimer S_{2n} en fonction de $S_{2n}^{\text{impair}} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} k$ et de $S_{2n}^{\text{pair}} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k$.
- (2) Montrer que $S_{2n}^{\text{pair}} = 2S_n$.
- (3) En déduire que $\sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} k = S_{2n} - 2S_n$.
- (4) Exprimer $\sum_{j=0}^{n-1} (2j+1)$ en fonction de n .

Exercice III.6. (1) Montrer que $k(k+1)(k+2) = (k+1)^3 - (k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$. On pourra utiliser le résultat de l'Exercice II.4.

Exercice III.7.

- (1) En utilisant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

- (2) Montrer que $\frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{2(k-1)k} - \frac{1}{2k(k+1)}$ et calculer $T = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3 - k}$.
- (3) En utilisant que $k = (k+1) - 1$, calculer $U = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$ et $V = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice III.8.

- (1) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
- (2) En déduire que pour tout entier $k > 1$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
- (3) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$.

Exercice III.9. Soit $x \in \mathbb{R}$. En s'aidant de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$.

IV – Sommes doubles

Exercice IV.1. Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i+j) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i \cdot j)$$

Exercice IV.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} pq, \quad \sum_{\substack{p+q \leq n \\ p \geq 0, q \geq 0}} pq, \quad \sum_{1 \leq p < q \leq n} pq.$$

On pourra s'aider des résultats de l'Exercice II.4.

Exercice IV.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer successivement les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i-j|, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j), \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j).$$

V – Produit, factorielle

Exercice V.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les quantités suivantes :

- | | |
|--|---|
| (1) $\sum_{h=0}^n 2^{2h+1}$ | (6) $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ |
| (2) $\sum_{m=0}^n \frac{3^m + 1}{3^{2m}}$ | (7) $\sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right)$ |
| (3) $\sum_{k=0}^n (4k + 3 \times 5^{k+2} + 3 + k)$ | (8) $\prod_{j=1}^n e^j$ |
| (4) $\sum_{k=2}^n (4k + 3 \times 5^{k+2} + 3 + k)$ | (9) $\prod_{\ell=1}^n \ell^2 e^{-2\ell}$ |
| (5) $(n \geq 1) : \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2^i}{3^i} + 1 + i \right)$ | |

Exercice V.2. $\sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ 2 \leq k \leq 4}} (j+k).$

- (1) De la même façon qu'en classe, calculer cette somme sans écrire tous ses termes et en intervenant les sommes.

(2) Soit deux entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Calculer : $S = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} (j + k)$.

Exercice V.3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$.

Exercice V.4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{i=0}^p (k+i)}.$$

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p!} - \frac{n!}{(n+p)!} \right).$$