

CHAPITRE 1

CALCUL DANS $\mathbb{R}$, RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE ET MANIPULATION DE SOMMES ET DE PRODUITS

I – Calcul élémentaire dans $\mathbb{R}$

Proposition I.0.1 (*Règles de calcul avec les fractions*)

Soient $k, m, n, c, d \in \mathbb{R}$ avec k, c, d non nuls. Alors :

- Écriture sous forme de produit :

$$\frac{n}{d} = n \times \frac{1}{d}.$$

- Simplification d'une fraction :

$$\frac{k \times n}{k \times d} = \frac{n}{d}.$$

- Produit de deux fractions :

$$\frac{m}{c} \times \frac{n}{d} = \frac{m \times n}{c \times d} \text{ et en particulier : } k \times \frac{n}{d} = \frac{k}{1} \times \frac{n}{d} = \frac{k \times n}{d}.$$

- Somme de deux fractions :

– Même dénominateur :

$$\frac{m}{d} + \frac{n}{d} = \frac{m + n}{d}.$$

– Dénominateurs différents :

$$\frac{m}{c} + \frac{n}{d} = \frac{m \times d}{c \times d} + \frac{c \times n}{c \times d} = \frac{m \times d + c \times n}{c \times d}.$$

- Inverse d'une fraction :

$$\frac{1}{\frac{n}{d}} = \frac{d}{n} \text{ avec } n \neq 0.$$

- Quotient de deux fractions (multiplication par l'inverse) :

$$\frac{\frac{m}{\frac{c}{n}}}{\frac{d}{d}} = \frac{m}{c} \times \frac{d}{n} = \frac{m \times d}{c \times n} \text{ avec } n \neq 0.$$

En particulier :

$$\frac{\frac{m}{\frac{n}{d}}}{\frac{d}{d}} = m \times \frac{1}{\frac{n}{d}} = m \times \frac{d}{n} = \frac{m \times d}{n} \text{ avec } n \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\frac{m}{\frac{c}{d}}}{\frac{d}{d}} = \frac{m}{c} \times \frac{1}{d} = \frac{m}{c \times d}.$$

- Égalité de deux fractions :

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{d} \text{ équivaut à } m \cdot d = n \cdot c.$$

 **Appropriation I.1.** Calculer : $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{3} + 2}$ et $\frac{3 - \frac{2}{3}}{-9 \frac{1}{2}}$.

I.1 Ensembles de nombres

Définition I.1.1 (*Ensembles de nombres*)

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres *entiers naturels* :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

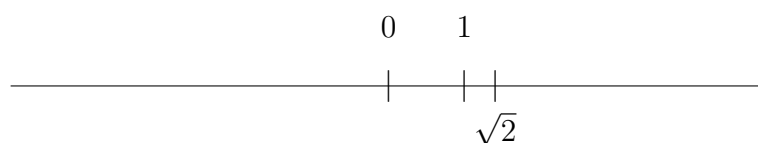
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres *entiers relatifs* :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres *rationnels*, c'est-à-dire des fractions entières :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres *réels*. L'ensemble $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite graduée et orientée :



On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Remarque.

- Pour $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq n$, l'intervalle entier $\llbracket m, n \rrbracket$ est défini par :

$$\llbracket m, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z}, m \leq k \leq n\} = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}.$$

- On utilise les indices ou exposants $*$, $+$ ou $-$ pour restreindre les ensembles ainsi :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ; \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\quad ; \quad \mathbb{Q}_- =]-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}.$$

- $\mathbb{R}$ a été présenté dès la classe de Seconde comme l'ensemble des abscisses possibles des points d'une droite munie d'un repère (deux points particuliers, distincts, jouant le rôle de 0 et de 1). Le point d'abscisse 0 est un centre de symétrie de cette droite, les abscisses des points de cette droite qui sont du côté du point d'abscisse 1 sont les nombres réels *positifs*. Les symétriques (par rapport au point d'abscisse 0) de ces points d'abscisse positives sont les points d'abscisses *négatives*. On note $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ l'ensemble des réels positifs.

 **Appropriation I.2.** Dire auquel plus petit ensemble de nombre susmentionné appartiennent les nombres suivants : $\frac{1}{8}, \frac{-2}{897}, -52, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{7}, \pi, \sqrt{\pi}$.

I.2 Puissances entières et identités remarquables

Proposition I.2.1 (*Puissances entières*)Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$,
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$,
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{n \times m}$,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Proposition I.2.2 (*Identités remarquables*)Soient a, b deux nombres réels.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Démonstration : (au tableau) ■

👉 **Appropriation I.3.** On rappelle que pour $q \neq 1$ on a $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

(1) Soient $a \neq b$ deux réels avec $a \neq 0$. En écrivant $q = \frac{b}{a}$ montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

(2) En déduire que $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$.

I.3 Inégalités et ordre

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que a est *inférieur ou égal* à b (ou que b est *supérieur ou égal* à a), et on note $a \leq b$, lorsque $b - a \in \mathbb{R}_+$.

Propriété I.3.1Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On dispose de trois propriétés suivantes,

- (1) $a \leq a$,
- (2) si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$,
- (3) si $a \leq b$ et si $b \leq a$ alors $a = b$. (*très utile !*)

Proposition I.3.1 (*Opérations sur les inégalités*)Soient $x, x', y, y', z \in \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- $x \leq y$ si et seulement si $x + z \leq y + z$.

- Si $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases}$ alors $x + x' \leq y + y'$.

- Si $\begin{cases} x \leq y \\ a > 0 \end{cases}$ alors $a \cdot x \leq a \cdot y$.

- Si $\begin{cases} x \leq y \\ a < 0 \end{cases}$ alors $a \cdot x \geq a \cdot y$.

- Si $\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq x' \leq y' \end{cases}$ alors $0 \leq x \cdot x' \leq y \cdot y'$.

- La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

Si $0 \leq x \leq y$ alors $x^2 \leq y^2$.

- La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

Si $0 \leq x \leq y$ alors $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

- La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

Si $0 < x \leq y$ alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.On a les propriétés analogues avec des inégalités **strictes**.**Démonstration :** (au tableau) ■

👉 **Appropriation I.4.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que si $0 \leq x \leq y$ alors $x^2 \leq y^2$, puis montrer que montrer que si $x \leq y \leq 0$ alors $x^2 \geq y^2$. Que dire si $x \leq 0 \leq y$?

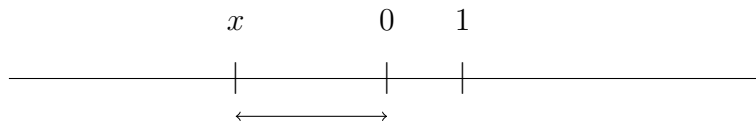
I.4 Valeur absolue

Définition I.4.1 (Valeur absolue d'un nombre réel)

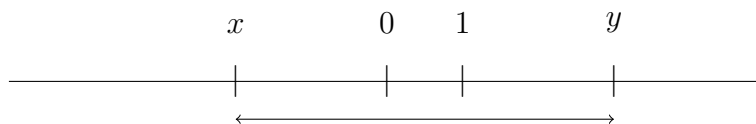
La *valeur absolue* d'un nombre réel x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = -x \text{ si } x < 0 \quad \text{et} \quad |x| = x \text{ si } x \geq 0.$$

Elle représente la **distance** (positive ou nulle) entre le point d'abscisse x et l'origine d'abscisse 0 sur un axe gradué.



De plus pour tout couple de réels (x, y) , $|x - y|$ représente la distance entre les points d'abscisses x et y .

**Exemple I.4.1.**

👉 **Appropriation I.5.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $|b - a| = |a - b|$.

👉 **Appropriation I.6.** Trouver tous les réels x tels que $|x + 2| = 1$.

Proposition I.4.1 (Valeur absolue et opérations)

Soient x et y deux réels et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $|x| \geq 0$ et $(|x| > 0 \text{ si et seulement si } x \neq 0)$,
- $x \leq |x|$ et $(x = |x| \text{ si et seulement si } x \geq 0)$,
- $-x \leq |x|$ et $(-x = |x| \text{ si et seulement si } x \leq 0)$,
- Parité : $|-x| = |x|$,
- Compatibilité avec le produit : $|x \times y| = |x| \times |y|$.
- Compatibilité avec la puissance : $|x^n| = |x|^n$.
- Compatibilité avec le quotient : si $y \neq 0$ alors $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration : (au tableau) ■

Proposition I.4.2 (Valeurs absolues et équations/inéquations)

Soient x et y deux réels et a un réel positif ou nul.

- $|x| = a$ équivaut à $x = a$ ou $x = -a$,
- $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$,
- $|x| \leq a$ équivaut à $-a \leq x \leq a$,
- $|x| \geq a$ équivaut à $(x \leq -a \text{ ou } x \geq a)$.

Démonstration : (au tableau) ■

👉 **Appropriation I.7.**

(1) Représenter sur la droite des réels, l'ensemble des nombres x tels que

$$|x - 3| < 1.$$

(2) Donner les réels a et $r > 0$ tels que $[3; 4.2] = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq r\}$.

(3) Représenter sur la droite des réels, l'ensemble des nombres x tels que

$$|x - 2| > 1.$$

II – Raisonnement par récurrence

II.1 Récurrence simple

Proposition II.1.1 (*Principe de récurrence*)

On désigne par $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n . Si pour un certain entier n_0 , on vérifie les hypothèses :

Initialisation: $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,

Hérédité: L'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Conclusion: On conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On donne ici un modèle de rédaction pour montrer que, pour tout $a > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Modèle de rédaction

✎ **Appropriation II.1.** Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que u_n existe et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ **Appropriation II.2.** Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, on a l'inégalité $2^n > n$.

✎ **Appropriation II.3.** Montrer que $n! \geq 2^n$ est vraie pour tout entier n à partir d'un certain rang.

II.2 Récurrence double, récurrence forte

II.2.1 Récurrence double

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$ et par $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. Montrons que $u_n = 1 + (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Modèle de rédaction

 **Appropriation II.4.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.2 Récurrence forte

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par $u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Modèle de rédaction

III – Sommes finies

III.1 Symbole somme : Σ

- (1) Il y a n nombres entiers dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, et $n + 1$ dans l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$.
- (2) Plus généralement, il y a $n - p + 1$ entiers dans l'ensemble $\llbracket p, n \rrbracket$.

Définition III.1.1 (*Notation somme Σ*)

- (1) Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n + 1$ nombres réels. La notation $\sum_{k=0}^n a_k$ ou $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k$ désigne la somme $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ et se prononce "somme de $k = 0$ à n des a_k " :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

- (2) Plus généralement, la notation $\sum_{k=p}^n a_k$ ou $\sum_{p \leq k \leq n} a_k$ désigne la somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ et se prononce "somme de $k = p$ à n des a_k " :

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

k est appelé l'indice de la somme.

 **Appropriation III.1.** Écrire avec le symbole Σ les sommes suivantes.

- $2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
- $e^3 + e^4 + e^5 + e^6 + e^7$
- $3 + 4 + \dots + n$.

L'indice k est un indice *muet* et peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre *non utilisée* :

$$2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=2}^n k^3 = \sum_{\ell=2}^n \ell^3 = \sum_{r=2}^n r^3.$$

Attention ! En revanche, l'écriture $\sum_{n=2}^n n^3$ est interdite car la lettre n est déjà utilisée !

 **Appropriation III.2.**

- (1) Écrire sans le signe Σ la somme : $\sum_{k=1}^n (k+1)(n-k)$.
- (2) Écrire avec le signe Σ la somme : $1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + 101 \times 103$.
- (3) Calculer $\sum_{n \leq k \leq m} 1$.

L'ensemble des indices peut être caractérisé par une contrainte (l'indice est implicitement considéré comme entier). Ces contraintes peuvent être placées sur plusieurs lignes :

Exemple III.1.1.

III.2 Opérations et propriétés classiques

Proposition III.2.1 (*Propriétés des sommes*)

Soient p, n, m trois entiers avec $p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites. Alors on a :

- Linéarité (additivité) :

$$\sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k$$

- Linéarité (factorisation) :

$$\sum_{k=p}^n (\lambda \times a_k) = \lambda \times \left(\sum_{k=p}^n a_k \right)$$

Cas particulier, lorsque la suite de réels (a_k) est constante, égale à un réel a :

$$\sum_{k=p}^n a = a \times \left(\sum_{k=p}^n 1 \right) = a \times (n - p + 1)$$

- Relation de Chasles :

$$\sum_{k=p}^{n+m} a_k = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$$

Cela revient à écrire :

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{n+m} = \left(a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \right) + \left(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} \right)$$

- Changement d'indice :

$$\sum_{k=n}^m a_{k+\ell} = \sum_{j=n+\ell}^{m+\ell} a_j$$

(on "pose" $j = k + \ell$) (*attention aux bornes !*).

Démonstration : (au tableau) ■

 **Appropriation III.3.** Simplifier puis calculer $\sum_{k=3}^{10} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2}$ en utilisant le changement d'indice $j = k - 2$.

Proposition III.2.2 (*Somme télescopique*)

Soient n, p deux entiers naturels, avec $p \leq n$, et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

Démonstration : (au tableau) ■

 **Appropriation III.4.** Soit (a_k) une suite de réels. Soient p, n deux entiers naturels tels que $p < n$. Simplifier la somme $\sum_{k=p}^n a_{k-1} - a_k$.

 **Appropriation III.5.** Soit (a_k) une suite de réels. Soient p, n deux entiers naturels tels que $p < n$. Simplifier la somme $\sum_{k=p}^n a_{k+2} - a_k$.

 **Appropriation III.6.** Montrer que, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2 - k}$. En déduire le calcul de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - k}$ pour $n \geq 2$.

✎ **Appropriation III.7.** On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n}}{n+k}$ pour tout entier naturel n .

(1) Vérifier que

$$\frac{\sqrt{n}}{2n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+k} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

pour $1 \leq k \leq n$. En déduire un encadrement de u_n .

(2) Montrer l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et calculer cette limite. Faire de même pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

Les changements d'indices

De façon générale, on somme des termes a_i où I est un ensemble fini. La plupart du temps $I \subset \mathbb{N}$. Par exemple, $I = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Il est parfois intéressant de parcourir l'ensemble des indices de plusieurs façons différentes. Par exemple, l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ se parcourt

$$1, 2, 3, \dots, n$$

mais il se parcourt aussi

$$n, n-1, n-2, \dots, 1$$

Le fait d'écrire $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$ s'exprime par l'identité

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_{n+1-k}.$$

Si cette fois ci on regarde la somme qui débute au rang $p \leq n$.

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Le terme de droite de cette égalité peut s'écrire encore $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{p+1} + a_p$. Les indices ne sont plus croissants mais décroissants. Il s'agit de termes de la forme a_{n+p-l} avec l allant de p jusqu'à n .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \rightarrow \text{croissants} \\ & \overset{p}{\bullet} & \overset{p+1}{\bullet} & \bullet & \overset{k}{\bullet} & \bullet & \overset{n-1}{\bullet} \quad \overset{n}{\bullet} \\ n+p-n & n+p-(n-1) & & n+p-l & & n+p-(p+1) & n+p-p \\ & & & & & & \leftarrow \text{décroissants} \end{array}$$

Donc

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{l=p}^n a_{n+p-l}.$$

Combien y-a-t-il de parcours possible de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$? Il s'agit du nombre de façons d'organiser n éléments, c'est le nombre $n!$ dont nous reparlerons.

III.3 Sommes classiques

Proposition III.3.1 (*Sommes classiques*)

(1) Somme des n premiers entiers consécutifs :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Somme des $n+1$ premières puissances consécutives :

$$\text{Pour tout } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

☞ **Appropriation III.8** (Lorsque la somme ne démarre pas à l'indice 0). Pour le calcul de $\sum_{k=p}^n k$ ou $\sum_{k=p}^n q^k$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on utilise la relation de Chasles :

- (1) (a) Pourquoi $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^{p-1} k + \sum_{k=p}^n k$?
 (b) En déduire une expression de $\sum_{k=p}^n k$ sans le symbole $\sum$.
- (2) (a) Pourquoi $\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^{p-1} q^k + \sum_{k=p}^n q^k$?
 (b) En déduire une expression de $\sum_{k=p}^n q^k$ sans le symbole $\sum$.

À (savoir) refaire systématiquement en exercice

☞ **Appropriation III.9.** Calculer $\sum_{k=3}^{50} k$ et $\sum_{k=2}^{15} 3^k$.

III.4 Sommes doubles

Définition III.4.1 (*Somme double*)

On appelle somme double une somme dont les termes dépendent de 2 indices. Typiquement

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} u_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$$

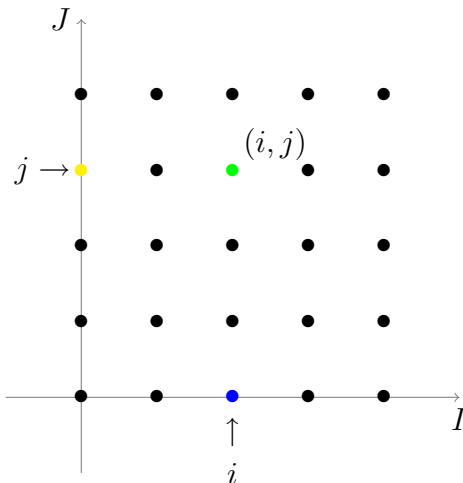
où I et J sont deux ensembles finis.

Notation $I \times J$

On dispose de deux ensembles I et J . L'ensemble formé des *couples* (i, j) avec $i \in I$ et $j \in J$ est appelé le *produit cartésien* de I avec J et est noté $I \times J$ (on lit : " I croix J "). On a

$$I \times J = \{(i, j), i \in I, j \in J\}.$$

On peut représenter le produit cartésien de I par J de la façon suivante, comme un nuage de points repérés par des coordonnées (i, j) .



Nous verrons plus tard dans l'année que, lorsque I et J sont finis le nombre d'éléments de $I \times J$ est le produit du nombre d'éléments de I par le nombre d'éléments de J .

Avec les notations de la définition, on a la chose suivante :

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} u_{i,j} = \underbrace{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}}_{\text{relation d'interversion}} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

- L'égalité

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$$

représente le fait que l'on somme les termes ligne après ligne.

- L'égalité

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}$$

représente le fait que l'on somme les termes colonne après colonne.

Exemple III.4.1.

III.4.1 Somme double avec des indices dans un "triangle"

Exemple III.4.2.

☞ **Appropriation III.10.** Intervertir et calculer la somme $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$.

IV – Produits finis

La définition de la notation $\prod$ est similaire à $\sum$, et ses propriétés se prouvent de manière similaire.

Définition IV.0.1 (*Notation produit $\prod$*)

- (1) Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ nombres réels. La notation $\prod_{k=0}^n a_k$ ou $\prod_{0 \leq k \leq n} a_k$ désigne le produit $a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$ et se prononce "produit de $k=0$ à n des a_k " :

$$\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \times a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n.$$

- (2) Plus généralement, la notation $\prod_{k=p}^n a_k$ ou $\prod_{p \leq k \leq n} a_k$ désigne le produit $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$ et se prononce "produit de $k=p$ à n des a_k " :

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times a_{p+2} \times \dots \times a_{n-1} \times a_n.$$

Exemple IV.0.1.

Proposition IV.0.1 (*Propriétés des produits*)

Soient p, n, m trois entiers avec $p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels. Alors on a :

- Produit de termes constants. Si la suite (a_k) est constante, égale à un réel a :

$$\prod_{k=p}^n a = a^{n-p+1} \quad \text{et, en particulier :} \quad \prod_{k=1}^n a = a^n.$$

- Commutativité :

$$\prod_{k=p}^n (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=p}^n b_k \right),$$

en particulier :

$$\prod_{k=p}^n (\lambda \times a_k) = \lambda^{n-p+1} \times \prod_{k=p}^n a_k.$$

Démonstration : (au tableau) ■

Proposition IV.0.2 (*Propriétés fondamentales du logarithme et de l'exponentielle*)

- Soient a, b deux réels. On a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ et, en généralisant (pour une suite de réels $(a_k)_{p \leq k \leq n}$) :

$$\exp \left(\sum_{k=p}^n a_k \right) = \prod_{k=p}^n \exp(a_k).$$

- Soient a, b deux réels strictement positifs. On a : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ et, en généralisant (pour une suite de réels $(a_k)_{p \leq k \leq n}$ strictement positifs) :

$$\ln \left(\prod_{k=p}^n a_k \right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k).$$

Démonstration : (au tableau) ■

Proposition IV.0.3 (*Produit télescopique*)

Soient n, p deux entiers naturels, avec $p \leq n$, et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **non nuls**.

$$\prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Démonstration : (au tableau) ■

Définition IV.0.2 (*Factorielle*)

Pour tout entier $n \geq 1$, le produit des n premiers entiers consécutifs est noté $n!$ et prononcé **factorielle** n :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple IV.0.2.

Propriété IV.0.1 (*Propriétés de la factorielle*)

Voici deux propriétés utiles de la factorielle :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{n!}{p!} = \prod_{k=p+1}^n k = (p+1) \times (p+2) \times \dots \times (n-1) \times n.$$

Démonstration : (au tableau) ■