Corrigé

Solution 1

1. $\dfrac{32}{40}=\dfrac{8\times 4}{8\times 5}=\dfrac{4}{5}$
2. $8^3\times\dfrac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\dfrac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$
3. $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{\left(3^3\right)^{-1}\times\left(2^2\right)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\dfrac{3^4}{3^3}=3$
4. On a, pour tout entier k :

$$\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^k}{4^k\times 3^{-k+1}}=\frac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\frac{(-2)\times 4^k\times 3^k\times 3^k}{4^k\times 3}=-2\times 3^{2k-1}$$

Solution 2

1. On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\times 3}{4\times 3}-\dfrac{1\times 4}{3\times 4}=\dfrac{6}{12}-\dfrac{4}{12}=\dfrac{6-4}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.
2. On transforme $0,2$ en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0,2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2\times 5}{3\times 5}-\frac{1\times 3}{5\times 3}=\frac{10}{15}-\frac{3}{15}=\frac{7}{15}.$$

3. Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12}=\frac{3\times 3}{1}=9.$$

4. On rappelle que diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse. On a donc :

$$\frac{-\frac{2}{15}}{-\frac{6}{5}}=-\frac{2}{15}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

Solution 3

1. On développe :

$$\begin{aligned}(2\times 3\times 5\times 7)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)&=\frac{2\times 3\times 5\times 7}{2}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{3}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{5}+\frac{2\times 3\times 5\times 7}{7}\\&=3\times 5\times 7+2\times 5\times 7+2\times 3\times 7+2\times 3\times 5\\&=105+70+42+30=247.\end{aligned}$$

2. On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24}&=\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}\\&=\left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8}\\&=\frac{145}{15}\times\frac{7}{8}\\&=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}\\&=\frac{203}{24}.\end{aligned}$$

3. On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times 7^3-25^5\times 49^2}{(125\times 7)^3+5^9\times 14^3}=\frac{5^{10}\times 7^3-5^{10}\times 7^4}{5^9\times 7^3+5^9\times 7^3\times 2^3}=\frac{5^{10}\times 7^3(1-7)}{5^9\times 7^3\left(1+2^3\right)}=\frac{5\times(-6)}{9}=-\frac{10}{3}.$$

4. On calcule en remarquant que $1980=1979+1$:

$$\begin{aligned}\frac{1\,978\times 1\,979+1\,980\times 21+1\,958}{1\,980\times 1\,979-1\,978\times 1\,979}&=\frac{1\,978\times 1\,979+1\,979\times 21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}\\&=\frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times 2}\\&=\frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times 2}=\frac{1\,979\times 2\,000}{1\,979\times 2}\\&=1\,000.\end{aligned}$$

Solution 4

1. On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
   Donc : $\dfrac{2\ 024}{(-2\ 024)^2 + (-2\ 023)(2\ 025)} = \dfrac{2\ 024}{(2\ 024)^2 + (1-2\ 024)\times(1+2\ 024)} = \dfrac{2\ 024}{(2\ 024)^2 + 1 - 2\ 024^2} = 2\ 024.$
2. On fait apparaître 2 024 dans 2 023 et 2 025 au dénominateur :
$$\begin{aligned}\frac{2\ 024^2}{2\ 023^2+2\ 025^2-2} &= \frac{2\ 024^2}{(2\ 024-1)^2+(2\ 024+1)^2-2}\\ &= \frac{2\ 024^2}{2\ 024^2-2\times 2\ 024\times 1+1+2\ 024^2+2\times 2\ 024\times 1+1-2}\\ &= \frac{2\ 024^2}{2\ 024^2-2\times 2\ 024+2\ 024^2+2\times 2\ 024} = \frac{2\ 024}{2\ 024+2\ 024} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
3. En posant $a = 1\ 234$, on a : $1\ 235 = a+1$ et $2\ 469 = 2a+1$.
   Donc : $\dfrac{1\ 235\times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234\times 2\ 469+1\ 235} = \dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$
4. En posant $a = 1\ 000$, on a : $999 = a-1$, $1\ 001 = a+1$, $1\ 002 = a+2$ et $4\ 002 = 4a+2$.
   Donc : $\dfrac{4\ 002}{1\ 000\times 1\ 002 - 999\times 1\ 001} = \dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \dfrac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$

Solution 5

1. On met au même dénominateur. Cela donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\ &= \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\ &= \frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}\\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$
2. On rappelle la formule : $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Cela donne :
$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{a^2+ab+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2\}$, on a :
$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

Solution 6

1. $\dfrac{29}{6} = \dfrac{4\times 6+5}{6} = 4+\dfrac{5}{6}.$
2. $\dfrac{k}{k-1} = \dfrac{k-1+1}{k-1} = 1+\dfrac{1}{k-1}.$
   Comme $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a bien $k-1>1$.
3. $\dfrac{3x-1}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+5}{x-2} = 3+\dfrac{5}{x-2}.$
   Comme $x\in]7,+\infty[$, on a bien $x-2>5$.

Solution 7

Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a en développant directement

$$AB = \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{(1+t)^2} = (1+t)^2 - (1+t^2) = 1+2t+t^2-1-t^2 = 2t\ .$$

Solution 8

1. $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$
2. $\frac{12}{11} > 1 > \frac{10}{12}$
3. $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$

Solution 9

1. Nous allons étudier les produits en croix.
   On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.
2. On réécrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.
   D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1) = 10^{12}+10^7+10^5+1$.
   D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12}+2\times 10^6+1 < 10^{12}+10\times 10^6+10^5+1$
   On en déduit que $(10^5+1)\times(10^7+1) > (10^6+1)\times\ (10^6+1)$, et on obtient, en divisant par $(10^7+1)(10^6+1)$ qui est strictement positif : $A > B$.

Solution 10

1. On calcule : $10^5\cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$.
2. On calcule : $\left(10^5\right)^3 = 10^{5\cdot 3} = 10^{15}$.
3. On calcule : $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$.
4. On calcule : $\frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-5-(-3)} = 10^{-5+3} = 10^{-2}$.
5. On calcule : $\frac{(10^5\cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5}\cdot 10^3)^{-3}} = \frac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}} = \frac{10^{10}}{10^6} = 10^4$.
6. On calcule : $\frac{(10^3)^{-5}\cdot 10^5}{10^3\cdot 10^{-5}} = \frac{10^{-15}\cdot 10^5}{10^{-2}} = \frac{10^{-10}}{10^{-2}} = 10^{-10-(-2)} = 10^{-8}$.

Solution 11

1. On calcule : $3^4\cdot 5^4 = (3\cdot 5)^4 = 15^4$.
2. On calcule : $(5^3)^{-2} = 5^{3\cdot(-2)} = 5^{-6}$.
3. On calcule : $\frac{2^5}{2^{-2}} = 2^{5-(-2)} = 2^7$.
4. On calcule : $(-7)^3\cdot(-7)^{-5} = (-7)^{3+(-5)} = (-7)^{-2}$.
5. On calcule : $\frac{6^5}{2^5} = \left(\frac{6}{2}\right)^5 = 3^5$.
6. On calcule : $\frac{(30^4)^7}{2^{28}\cdot 5^{28}} = \frac{30^{4\cdot 7}}{(2\cdot 5)^{28}} = \frac{30^{28}}{10^{28}} = \left(\frac{30}{10}\right)^{28} = 3^{28}$.

Solution 12

1. $\frac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \frac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \frac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}$.
2. On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3^1$.
3. On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \frac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2 = 2^1\cdot 3^0$.

4. On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}$.

Solution 13

1. On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8$.
2. Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11$.
3. On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}$.
4. Même principe que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5$.

Solution 14

1. On met au même dénominateur les deux premiers termes :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x^2-1} &= \frac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x^2-1}\\
&= \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{x}{x+1}
\end{aligned}$$

On remarquera que, dans la dernière étape, nous avons pu diviser par $(x-1)$ au numérateur et au dénominateur, car ce facteur est supposé non nul dans l'énoncé (x n'est pas une valeur interdite).

2. Même principe :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x^2-4} &= \frac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{8}{(x+2)(x-2)}\\
&= \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)}\\
&= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)}\\
&= \frac{1}{x-2}
\end{aligned}$$

3. On commence par simplifier les fractions, puis c'est le même principe que précédemment :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2x^2}{x^3-x} &= \frac{x\cdot x}{x(x-1)}+\frac{x\cdot x^2}{x^2(x+1)}-\frac{2x\cdot x}{x(x^2-1)}\\
&= \frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\\
&= \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x}{x+1}
\end{aligned}$$

4. Et à nouveau :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-2x} &= \frac{1}{x}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\frac{2}{x(x-2)}\\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x(x-2)}\\
&= \frac{x-2+x}{x(x-2)}+\frac{2}{x(x-2)}\\
&= \frac{2}{x-2}
\end{aligned}$$

Solution 15

1. On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. On obtient :

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3=8x^3-6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}$$

2. On peut écrire :

$$(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$$

R Pour être « efficace », il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p)=abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3)\times 1+3\times 1+(-1)\times 1=-1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3. On sait que $(x-1)(x+1)=x^2-1$ et on remarque que $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$. On a donc :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)=((x+1)(x-1))\left((x+1)\left(x^2-x+1\right)\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right)=x^5-x^3+x^2-1.$$

4. On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1.$
5. On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)=x^5-x^3-x^2+1.$
6. On obtient, après calcul, $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1$

Solution 16

On ne donne pas ici les calculs intermédiaires, qui sont similaires à ceux de l'exercice précédent.

1. $-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$
2. $-28+21x$
3. $2+x^3-x^4-x^5$
4. $-1-3x-3x^2+x^3$
5. $1+x^4$
6. $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

Solution 17

1. Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors :

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49=-(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2=(6x+7)(-(6x-1)+6x-7)=-6(6x+7)\,.$$

2. On calcule $25-(10x+3)^2=5^2-(10x+3)^2=(10x+8)(-10x+2)=4(5x+4)(-5x+1)$.
3. Après calcul, on obtient : $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64=2(3x-4)(10x+3)$
4. Après calcul, on obtient : $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64=-8(x+1)(x+16)$

Solution 18

On reconnaît à chaque fois une identité remarquable et on a :

1. $x^2-2x+1=(x-1)^2$
2. $x^2+4x+4=(x+2)^2$

Solution 19

1. $(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$
2. On remarque que $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(x+3y)^2-(13x)^2$.
   On a donc : $x^2+6xy+9y^2-169x^2=(14x+3y)(-12x+3y)$.
3. On remarque que $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$
4. On remarque que $xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$
5. On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y=(x+y)(x^2+2x+1)=(x+y)(x+1)^2$.
6. $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(y^2-16x^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$

Solution 20

1. $x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.
2. $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64=-8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right]=-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.
3. $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.
   La factorisation est alors terminée puisque les deux équations $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$ n'ont pas de solutions réelles.

Solution 21

On part du membre de droite, on développe et on obtient bien le résultat souhaité.

Solution 22

1. La forme canonique est $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. On a finalement : $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.
2. La forme canonique est $3\left(\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right)$. On a alors, en procédant comme précédemment :
$$3x^2+7x+1=3\left(x+\frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$$
3. La forme canonique est $2\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{233}{16}\right)$. On en déduit que la forme factorisée est :
$$2x^2+3x-28=2\left(x+\frac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$$
4. La forme canonique est $-5\left(\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right)$. On en déduit que la forme factorisée est :
$$-5x^2+6x-1=-5(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)$$

Solution 23

1. $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$ car $5\geq 0$ et $5^2=25$.
2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$ car $\sqrt{3}>1$ donc $\sqrt{3}-1>0$.
3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=-\sqrt{3}+2$ car $\sqrt{3}<2$ donc $-\sqrt{3}+2>0$.
4. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=\sqrt{7}-2$ car $7>4$ donc $\sqrt{7}>\sqrt{4}=2$ donc $\sqrt{7}-2>0$.
5. $\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$ car $\pi>3$ donc $\pi-3>0$.

Solution 24

1. $(2\sqrt{5})^2=2^2(\sqrt{5})^2=4\times 5=20$
2. $(2+\sqrt{5})^2=4+4\sqrt{5}+5=9+4\sqrt{5}$

3. On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :
$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$
4. Même principe qu'à la question précédente : $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$
5. $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2=3^2+6\sqrt{7}+7-3^2+6\sqrt{7}-7=12\sqrt{7}$
6. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4=\left(\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$
7. $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{25-10\sqrt{2}+2}{3}=9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$
8. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}+3=10$

Solution 25

1. On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} \\
&= \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\
&= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

2. De même on a : $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$
4. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$
5. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$
6. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = 25(2-\sqrt{3})$
7. $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

Solution 26

1.

$$\begin{aligned}
f(x)+\frac{1}{f(x)} &= \sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)} &= \frac{\sqrt{x-1+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1+2}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{x+1-(x-1)} \\
&= \frac{x+1-2\sqrt{(x-1)(x+1)}+x-1}{2} \\
&= x-\sqrt{x^2-1}
\end{aligned}$$

3. On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

5. Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

6.
$$\frac{f(x)}{f''(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^{3/2}}} = -4(x-1)^2$$

Solution 27

1. On calcule :
$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$
De plus, $3+\sqrt{5} \geq 3-\sqrt{5} \geq 0$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2. Autrement dit, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.
2. On reprend le même principe :
$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\sqrt{3+2\sqrt{2}}+3+2\sqrt{2} = 6+2\sqrt{9-8} = 8.$$
De plus, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}} \geq 0$, donc $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Solution 28

1. On calcule le discriminant :
$$\Delta = (-13)^2 - 4\times 1\times 42 = 169-168 = 1$$
Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines, donc en utilisant les notations usuelles on a :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
Donc, après simplification, les solutions de l'équation $x^2-13x+42=0$ sont 6 et 7.
2. Même principe : ici $\Delta = 4$ et les solutions de l'équation $x^2+8x+15=0$ sont -3 et -5.
3. Même principe : ici $\Delta = 16$ et les solutions de l'équation $x^2+18x+77=0$ sont -7 et -11.
4. Même principe là encore : $\Delta = 196 = 14^2$ et les solutions de l'équation $x^2-8x-33=0$ sont -3 et 11.

Solution 29

1. C'est une identité remarquable : $x^2-6x+9=(x-3)^2$. La racine est donc 3.
2. C'est une identité remarquable : $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$. La racine est donc $-\frac{1}{3}$.
3. Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en remarquant que le produit des racines vaut -12.
4. Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc 3 puisque le produit des racines vaut 6.
5. Le nombre 0 est racine évidente. Comme $x^2-5x=x(x-5)$, l'autre racine est 5.
6. Le nombre 0 est racine évidente. Comme $2x^2+3x=x(2x+3)$, l'autre racine est $-\frac{3}{2}$.
7. La fonction $x \longmapsto 2x^2+3$ est strictement positive car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas. Donc l'équation $2x^2+3=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
8. Le nombre 1 est racine évidente, l'autre est donc -5 puisque le produit des racines vaut -5.
9. Le nombre 1 est racine évidente, l'autre est donc $\frac{8}{3}$ puisque le produit des racines vaut $\frac{8}{3}$.
10. Le nombre -1 est racine évidente, l'autre est donc $-\frac{19}{5}$ puisque le produit des racines vaut $\frac{19}{5}$.

Solution 30

1. Le nombre 1 est racine évidente, l'autre est donc $\frac{a-b}{b-c}$ puisque le produit des racines vaut $\frac{a-b}{b-c}$.
2. Le nombre 1 est racine évidente, l'autre est donc $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ puisque le produit des racines vaut $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$.
3. Le nombre m est racine évidente, l'autre est donc $-(m+a+b)$ puisque le produit des racines vaut (après calcul) $-(m^2+(a+b)m)$.
4. Le nombre m est racine évidente, l'autre est donc $\frac{m(a-b)}{b-c}$ puisque le produit des racines vaut $\frac{m^2(a-b)}{b-c}$.

5. En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'équation devient $m(x^2+ab)=x(m^2+ab)$ qui est une équation du second degré.
   Sur la forme initiale de l'équation on remarque que m est racine évidente, l'autre est donc $\dfrac{ab}{m}$.
6. Le nombre $a+b$ est racine de l'équation.
   Celle-ci se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b)=ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Solution 31

1. Le produit des racines est $\dfrac{8}{3}$ donc la deuxième racine est $\dfrac{2}{3}$.
2. Le produit des racines est $\dfrac{6}{7}$ donc la deuxième racine est $-\dfrac{2}{7}$.
3. Le produit des racines est $\dfrac{2}{m}$ donc la deuxième racine est $-\dfrac{1}{m}$.
4. Le produit des racines est $\dfrac{2m^2}{m+3}$ donc la deuxième racine est $\dfrac{2m}{m+3}$

Solution 32

1. La somme des racines vaut 22, leur produit 117. Une équation possible est donc $x^2-22x+117=0$.
2. La somme des racines vaut 6, leur produit -187. Une équation possible est donc $x^2-6x-187=0$.
3. La somme des racines vaut 4, leur produit 1. Une équation possible est donc $x^2-4x+1=0$.
4. La somme des racines vaut $2m$, leur produit 3. Une équation possible est donc $x^2-2mx+3=0$.
5. La somme des racines vaut $\dfrac{4m+1}{2}$, leur produit $\dfrac{2m^2+m-15}{2}$.
   Une équation possible est donc $x^2-\dfrac{4m+1}{2}x+\dfrac{2m^2+m-15}{2}=0$
   qui est équivalente à $2x^2-(4m+1)x+(2m^2+m-15)=0$.
6. La somme des racines vaut $\dfrac{2m-1}{m}$, leur produit $\dfrac{m^2-m-2}{m^2}$.
   Une équation possible est donc $x^2-\dfrac{2m-1}{m}x+\dfrac{m^2-m-2}{m^2}=0$
   qui est équivalente à $m^2x^2-m(2m-1)x+(m^2-m-2)=0$.

Solution 33

1. Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.
   Ici, le discriminant vaut $\Delta=(2m+3)^2-4m^2=3(4m-3)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si et seulement si $m=-\dfrac{3}{4}$. Dans ce cas la racine est $\dfrac{3}{4}$.
2. Ici, le discriminant vaut $\Delta=4(m^2-6m-7)$, une racine évidente de ce trinôme en m est $m=-1$ donc l'autre vaut 7. Pour $m=-1$ on trouve la racine du trinôme initial $x=-2$ et pour $m=7$ on trouve $x=2/3$.
3. Ici le discriminant vaut $\Delta=4((3m+1)^2-(m+3)^2)=32(m^2-1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si $m=1$, auquel cas l'équation s'écrit $x^2+2x+1=0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2-2x+1=0$ dont la racine double est 1.

Solution 34

1. Ici on développe (de tête, sans poser les calculs) le membre de droite $(x+2)(ax+b)$: on constate que le coefficient dominant (celui devant le terme de degré 2) est a, tandis que le coefficient constant est $2b$.
   Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients respectifs sont égaux. On a donc $a=2$ et $b=3$.
2. Même principe que pour la question 1 : $a=-2$ et $b=1$.
3. Même principe là encore : $a=-3$ et $b=5$.
4. Même principe : $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=8$.
5. Enfin : $a=1$ et $b=\dfrac{-21}{-\sqrt{7}}=3\sqrt{7}$.

Solution 35

1. Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc positif ou nul sur $]-\infty;1]\cup[\sqrt{2};+\infty[$.
2. Les racines sont -3 et 5. Le trinôme est donc positif ou nul sur $[-3;5]$.
3. Ici, les racines sont -1 et $\dfrac{2}{3}$. Le trinôme est donc positif ou nul sur $]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.
4. Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est positif ou nul sur $]-\infty;-1/2[\cup[4;+\infty[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

Solution 36

On va résoudre les deux premiers systèmes par substitution, les deux suivants par combinaison. En classe préparatoire on vous demandera de privilégier la résolution par combinaison.Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1.

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+4y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 10y+3=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ x=1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-2x \\ x-16+2x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=5+16=21 \\ y=16-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x-6y=-3 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$
4.

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 6x+2y=3\sqrt{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 10y=5\sqrt{2} \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+4L2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x=\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Solution 37

1. On a $16=4^2=2^4$ donc $\ln(16)=4\ln(2)$.
2. On a $512=2^9$ donc $\ln(512)=9\ln(2)$.
3. On a $0,125=\dfrac{1}{8}$ donc $\ln(0,125)=-\ln(8)=-3\ln(2)$.
4. $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{1}{8}\ln(4)+\dfrac{1}{4}\ln(8)=-\dfrac{1}{4}\ln(2)+\dfrac{3}{4}\ln(2)=\dfrac{1}{2}\ln(2)$.
5. On a $72=8\times9=2^3\times3^2$ donc $\ln(72)-2\ln(3)=(3\ln(2)+2\ln(3))-2\ln(3)=3\ln(2)$.
6. $\ln(36)=\ln\left(6^2\right)=2\ln(6)=2\ln(2)+2\ln(3)$

Solution 38

1. $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)=-\ln(3\times2^2)=-\ln(3)-2\ln(2)$
2. $\ln\left(\dfrac{9}{4}\right)=\ln\left(\dfrac{3^2}{2^2}\right)=2\ln(3)-2\ln(2)$
3. On a $0,875=\dfrac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln(21)+2\ln(14)-3\ln(0,875)&=(\ln(3)+\ln(7))+2(\ln(2)+\ln(7))-3(\ln(7)-\ln(8))\\&=\ln(3)+2\ln(2)+3\times3\ln(2)=\ln(3)+11\ln(2).\end{aligned}$$

4. $\ln(500)=\ln(125\times4)=\ln(5^3\times2^2)=3\ln(5)+2\ln(2)$
5. $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)=\ln\left(2^4\right)-\ln\left(5^2\right)=-2\ln(5)+4\ln(2)$
6. $\ln(6,25)=\ln\left(\dfrac{625}{100}\right)=\ln(5^4)-\ln(5^2\times2^2)=2\ln(5)-2\ln(2)$

Solution 39

1. On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

   On a donc
$$\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\ln((1+\sqrt{2})^2) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8}\ln(1+\sqrt{2}) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
   d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8}\ln\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$.
2. $$\begin{aligned}\beta &= \exp\left(\ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)\right)\\ &= (7+5\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}+1)^8 \times (\sqrt{2}-1)^7\\ &= (7+5\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}+1)^7 \times (\sqrt{2}-1)^7\\ &= (7+5\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}+1) \times \left((\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)\right)^7\\ &= (7+5\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}+1) \times 1\\ &= 17+12\sqrt{2}\end{aligned}$$
3. On a $\gamma = \ln\left(\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln\left(\left(\left((4-3)^{20}\right)\right)\right) = \ln(1) = 0$
4. De même : On a $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{5-1}{4}\right) = \ln(1) = 0$

Solution 40

1. $e^{3\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = 8$
2. $\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$
3. $\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \dfrac{1}{3}$
4. $e^{-2\ln(3)} = \left(e^{\ln(3)}\right)^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
5. $\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$
6. $e^{\ln(3)-\ln(2)} = \dfrac{e^{\ln(3)}}{e^{\ln(2)}} = \dfrac{3}{2}$

Solution 41

1. $-e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -2$
2. On a $e^{-(\ln\ln(2))} = e^{(-1)\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.
3. $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right) = -\ln\left(e^{17}\right) = -17$
4. $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \dfrac{1}{2}\ln(e^4) - \dfrac{1}{2}\ln(e^2) = \ln(e) = 1$
5. On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln(e^2))\right) = \dfrac{1}{2}(-\ln(e^2))) = \dfrac{1}{2}\times(-2) = -1$.
6. $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(e^{-3})\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{3}\times(-3)\right) = \exp(1) = e$

Solution 42

1. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} e^{3x-5} \geq 12 &\iff 3x-5 \geq \ln(12) \text{ car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff 3x \geq \ln(12)+5\\ &\iff x \geq \frac{\ln(12)+5}{3} \text{ car } 3>0.\end{aligned}$$
   Donc, l'ensemble solution est $\mathscr{S} = \left[\dfrac{\ln(12)+5}{3};+\infty\right[$.

2. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1 \leq e^{-x^2+x} &\iff -x^2+x \geq \ln(1) = 0 \text{ car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff x(-x+1) \geq 0 \\ &\iff (x \geq 0 \text{ et } -x+1 \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ et } -x+1 \leq 0) \\ &\iff (x=0) \text{ ou } (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

   Donc, l'ensemble solution est $\mathscr{S} = [0,1]$.

3. En raisonnant de la même manière, et en rédigeant aussi rigoureusement, on trouve que : $\mathscr{S} = \left[\frac{2}{e};+\infty\right[$.
4. En raisonnant de la même manière, et en rédigeant aussi rigoureusement, on trouve que : $\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{12};+\infty\right[$.
5. Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x < -5$ et $x > 61$ (car la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$). Ces deux conditions ne peuvent être vérifiées simultanément. Donc, l'ensemble solution est $\mathscr{S} = \emptyset$.

Solution 43

1. On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5)+(x^2+3x+2)\times 2 = 6x^2+2x-11$.
2. On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5)+(x^3+3x+2)\times 2x = 5x^4-6x^2+4x-15$.
3. On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x)+(x^2-2x+6)\times 2\exp(2x) = 2(x^2-x+5)\exp(2x)$.
4. On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2)+(3x^2-x)\times \frac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2)+\frac{x(3x-1)}{x-2}$.

Solution 44

1. On calcule : $f'(x) = 2 \times (2x-5) \times (x^2-5x)^1 = 2x(2x-5)(x-5)$
2. On calcule : $f'(x) = 5(x^2-5x)^4(2x-5)$.
3. On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.
4. On calcule : $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x))^2$
5. On remarque que $f(x) = \left(e^{3x}\right)^6 = e^{18x}$ et on calcule alors facilement la dérivée : $f'(x) = 18e^{18x}$.

Solution 45

1. On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$
2. On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$
3. On calcule : $f'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4\left(e^x(1-x)+1\right)}{(e^x+1)^2}$.
4. On calcule : $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}\ln(2x) - \frac{1}{x}\frac{2}{2x}}{(\ln(2x))^2} = -\dfrac{1+\ln(2x)}{x^2\,(\ln(2x))^2}$