HEC-ESCP 2021

Partie 1- Polynômes factoriels

On note F, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et, pour tout entier naturel r, on note F_r, le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r.
On note U_k la fonction $x \mapsto x^k$ avec la convention habituelle $x^0 = 1$, de telle sorte que la base canonique de F_r est notée $(U_0, U_1, \ldots, U_r)$.

1. Soit r un entier naturel. On considère une famille $(Q_0, \ldots, Q_r)$ de fonctions polynomiales de degrés respectifs $d_0, d_1, \ldots, d_r$ avec $d_0 < d_1 < \ldots < d_r$.
   (a) On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ non tous nuls tels que
   $$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_r Q_r = 0$$
   En considérant $m = \max\{k \in [\![0, r]\!], \lambda_k \neq 0\}$, démontrer que l'hypothèse précédente est absurde. Qu'a-t-on ainsi démontré ?
   (b) À quelle condition la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r)$ est-elle une base de F_r ?(On précisera s'il s'agit d'une condition *nécessaire*, d'une condition *suffisante* ou d'une condition *nécessaire et suffisante*.)
2. Pour tout entier naturel r, le réel « x puissance r descendante » est noté $x^{\underline{r}}$ et défini par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{\underline{r}} = x(x-1) \times \ldots \times (x-r+1) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k)$$
   avec la convention $x^{\underline{0}} = 1$. On pose alors
   $$\forall r \in \mathbb{N},\ V_r : x \mapsto x^{\underline{r}}.$$
   Il est clair que V_r appartient à F.
   (a) Quelles sont les racines de V_r ?
   (b) Démontrer que la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_r)$ est une base de F_r.
   (c) Démontrer que, pour tout entier $r \geqslant 2$,
   $$x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})$$
   (On pourra raisonner par récurrence sur r.)
3. Ici, l'entier $r \geqslant 1$ est fixé et on compare la famille $(V_k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ à la base canonique $(U_k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ de l'espace F_r des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique famille $(\sigma(r,k))_{0 \leqslant k \leqslant r}$ de nombres réels tels que
   $$U_r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k) V_k.$$

(b) Établir les relations suivantes :

$$\forall r \in \mathbf{N}^*, \quad \sigma(r,0) = 0 \tag{1}$$

$$\sigma(r,1) = \sigma(r,r) = 1 \tag{2}$$

$$\sigma(r,r-1) = \frac{r(r-1)}{2} \tag{3}$$

$$\forall r \in [\![2,+\infty[\![, \quad \sigma(r,2) = 2^{r-1} - 1 \tag{4}$$

(c) Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, on a

$$\sigma(r+1,k) = \sigma(r,k-1) + k\sigma(r,k).$$

(d) En déduire que $\sigma(r,k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$.

(e) Écrire un code Scilab qui affiche (au moyen de la commande `disp`) les listes $(\sigma(r,k))_{1 \leqslant k \leqslant r}$ pour r variant de 2 à 5.
On pourra utiliser la commande `ones(n,p)` qui retourne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel r, il existe une unique famille $(s(r,k))_{0 \leqslant k \leqslant r}$ de nombres réels tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^{\underline{r}} = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k.$$

(b) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que

$$\forall k \in [\![1,r]\!], \quad s(r+1,k) = s(r,k-1) - rs(r,k).$$

En déduire la valeur de $s(r,1)$.

(c) Déduire de 4b) que, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, le signe de $s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$.

(d) Démontrer que $\sigma(r,r)s(r,r) = 1$ et que

$$\forall \ell \in [\![0,r-1]\!], \quad \sum_{k=\ell}^{r} \sigma(r,k)s(k,\ell) = 0.$$

(e) Calculer $s(r,r)$ pour tout $r \in \mathbf{N}^*$ et $s(r,r-1)$ pour tout entier $r \geqslant 2$.

Partie 2 - Quelques propriétés de la loi de Poisson

> *Sous réserve d'existence, on note respectivement $\mathbf{E}(A)$ et $\mathbf{V}(A)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A et $\mathbf{Cov}(A,B)$ la covariance de deux variables aléatoires discrètes A et B.*
> *Dans cette partie, on note X, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.*

Pour tout entier $r \geqslant 1$, on pose $X^{\underline{r}} = X(X-1) \times \ldots \times (X-r+1)$ avec la convention $X^{\underline{0}} = X^0 = 1$.
Avec la suite $(\sigma(r,k))_{0 \leqslant k \leqslant r}$ définie au 3.a) et la suite $(s(r,k))_{0 \leqslant k \leqslant r}$ définie au 4.a), on a

$$\forall r \in [\![1, +\infty[\![, \ X^r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k) X^{\underline{k}} \quad \text{et} \quad X^{\underline{r}} = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) X^k.$$

On admet ces deux résultats sans démonstration.

5. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.
   (b) Exprimer X, X^2, X^3 et X^4 en fonction des variables aléatoires $X^{\underline{1}}$, $X^{\underline{2}}$, $X^{\underline{3}}$ et $X^{\underline{4}}$.
   (c) Démontrer que la variable aléatoire X admet des moments de tous ordres.
6. (a) Justifier que, pour tout entier $r \geqslant 1$, la variable aléatoire $X^{\underline{r}}$ admet des moments de tous ordres.
   (b) Pour tout entier $r \geqslant 1$, exprimer $\mathbf{E}(X^{\underline{r}})$ en fonction de r et de θ.
   (c) Calculer $\mathbf{E}(X^3)$ et $\mathbf{E}(X^4)$ en fonction de θ.
7. Pour tout entier naturel k et pour tout réel $\theta > 0$, on pose

$$f(\theta, k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \quad \text{et} \quad g(\theta, k) = \ln(f(\theta, k)).$$

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 0$, calculer l'expression de la dérivée partielle $\partial_1(g)(\theta, k)$ et exprimer la variable aléatoire $\partial_1(g)(\theta, X)$ en fonction de X et de θ.
   (b) Vérifier que $XX^{\underline{r}} = X^{\underline{r+1}} + rX^{\underline{r}}$ pour tout entier $r \geqslant 1$. En déduire que $\mathbf{Cov}(X, X^{\underline{r}}) = r\theta^r$.
   (c) Calculer $\mathbf{Cov}(\partial_1(g)(\theta, X), X^{\underline{r}})$ et en déduire l'inégalité

$$\forall \theta > 0, \ \forall r \in \mathbf{N}^*, \ \mathbf{V}(X^{\underline{r}}) \geqslant r^2 \theta^{2r-1}.$$

Partie 3- Estimation ponctuelle de fonctions du paramètre θ

Le contexte et les notations sont ceux de la partie 2.
On suppose que le paramètre $\theta \in \mathbf{R}_+^*$ est inconnu et on cherche ici à estimer $\varphi(\theta)$, où φ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on considère dans toute cette partie un $n-$échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui, comme X, suivent toutes la loi de Poisson de paramètre θ.
Pour tout $\theta > 0$ et pour tout $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose

$$F(\theta, k_1, \ldots, k_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = k_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, k_i)$$

et

$$G(\theta, k_1, \ldots, k_n) = \ln(F(\theta, k_1, \ldots, k_n)).$$

8. (a) Démontrer que les fonctions $\theta \mapsto F(\theta, k_1, \ldots, k_n)$ et $\theta \mapsto G(\theta, k_1, \ldots, k_n)$ sont dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1(F)(\theta, k_1, \ldots, k_n)$ et $\partial_1(G)(\theta, k_1, \ldots, k_n)$.

(b) Pour tout $\theta > 0$, on pose $Z_\theta = \partial_1(G)(\theta, X_1, \ldots, X_n)$. Démontrer que la variable Z_θ est centrée et admet une variance strictement positive, notée $I(\theta)$, que l'on calculera.

On rappelle que : *s'il existe n séries absolument convergentes $\sum\limits_{k_1 \in \mathbf{N}} v_{1,k_1}, \ldots, \sum\limits_{k_n \in \mathbf{N}} v_{n,k_n}$ telles que*

$$\forall (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n,\ |u_{k_1,\ldots,k_n}| \leqslant |v_{1,k_1}| \times \ldots \times |v_{n,k_n}|$$

alors la série $\sum u_{k_1,\ldots,k_n}$ est dite <u>absolument convergente</u>. On admet que, dans ce cas, la somme

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{N}^n} u_{k_1,\ldots,k_n}$$

est bien définie.

On rappelle l'énoncé de la Formule de transfert : *si la série $\sum u_\theta(k_1, \ldots, k_n) F(\theta, k_1, \ldots, k_n)$ est absolument convergente (au sens qui vient d'être rappelé), alors la variable aléatoire discrète $U_\theta = u_\theta(X_1, \ldots, X_n)$ est d'espérance finie et*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(U_\theta) &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{N}^n} u_\theta(k_1, \ldots, k_n) F(\theta, k_1, \ldots, k_n) \\
&= \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{N}^n} u_\theta(k_1, \ldots, k_n) \mathbb{P}([X_1 = k_1] \cap \ldots \cap [X_n = k_n]).
\end{aligned}$$

Soit $t\colon \mathbf{N}^n \to \mathbf{R}$, une application indépendante de θ. On peut alors considérer la variable aléatoire discrète

$$T = t(X_1 \ldots, X_n)$$

comme un estimateur de $\varphi(\theta)$.
On dira que la variable aléatoire T est un <u>estimateur régulier</u> de $\varphi(\theta)$ lorsque les trois conditions suivantes (R_1), (R_2) et (R_3) sont satisfaites.

$$\mathbf{E}(T) = \varphi(\theta) \qquad (R_1)$$

$$\mathbf{V}(T) \text{ existe} \qquad (R_2)$$

$$\forall \theta > 0,\ \varphi'(\theta) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbf{N}^n} t(k_1, \ldots, k_n) \partial_1(F)(\theta, k_1, \ldots, k_n) \qquad (R_3)$$

On notera que la condition (R_3) sous-entend que le second membre est la somme d'une série absolument convergente (au sens rappelé plus haut).

9. Dans cette question, on suppose que T est un estimateur régulier de $\varphi(\theta)$.
   (a) La variable aléatoire T est-elle un estimateur sans biais de $\varphi(\theta)$?
   (b) Pourquoi la condition (R_3) n'est-elle pas une conséquence directe de la condition (R_1) ?
10. Soit T un estimateur régulier du paramètre $\varphi(\theta)$.
   (a) Établir les égalités suivantes :

$$\forall \theta > 0,\ \varphi'(\theta) = \mathbf{E}(T \times Z_\theta) = \mathbf{Cov}(T, Z_\theta).$$

(b) En déduire l'inégalité

$$\forall \theta > 0,\ \mathbf{V}(T) \geqslant \frac{(\varphi'(\theta))^2}{I(\theta)}$$

où $I(\theta)$ a été défini au 8.b).

11. On cherche à simuler un échantillon de N réalisations de Z_θ pour différents couples (n, θ).

(a) Compléter le code scilab suivant en justifiant votre réponse.

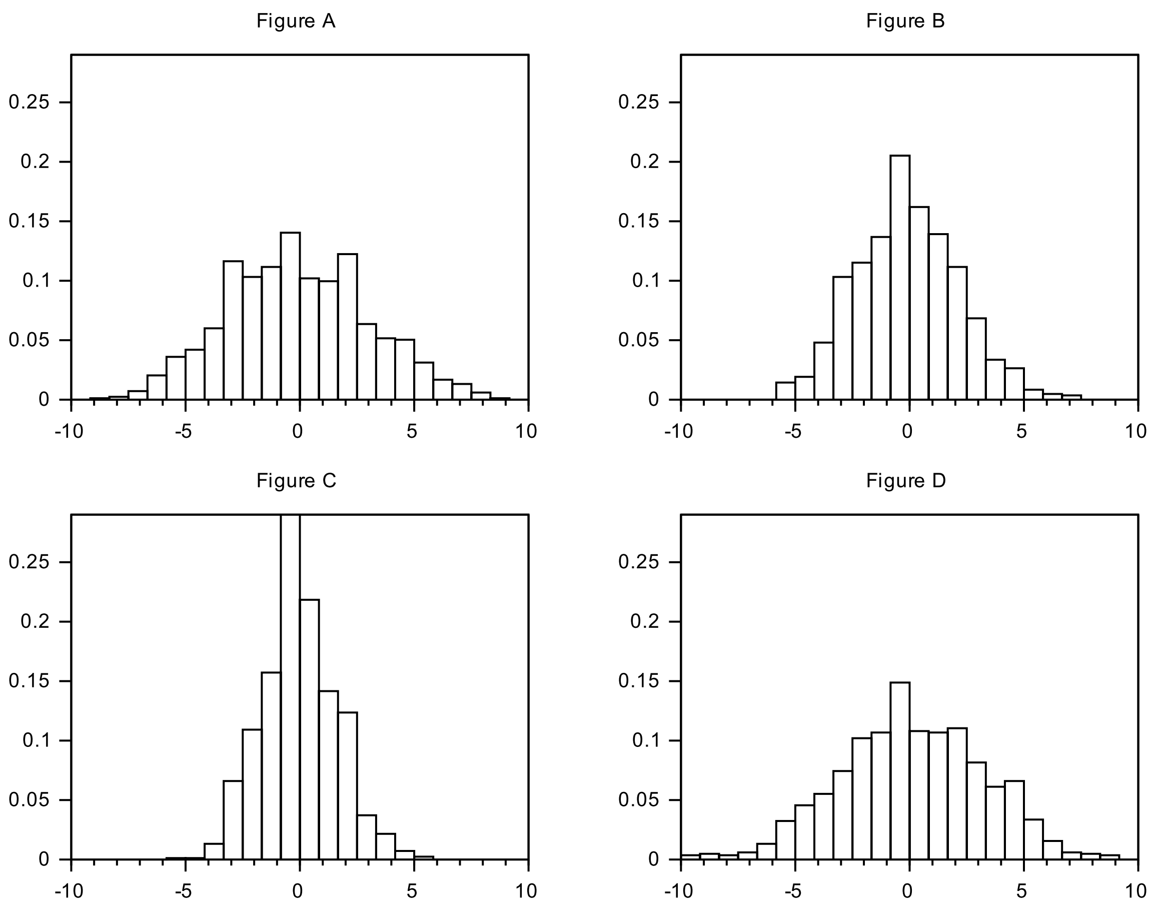
```
function ech=Z_n(n, theta)
        X=grand(n,N,'poi',theta);
        ech = (sum(X,    ) - n*theta)/theta
endfunction
```

On rappelle l'usage de la commande `sum` : pour un tableau $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$, les deux instructions `sum(M, 'r')` et `sum(M, 'c')` retournent respectivement les tableaux

$$\left(\sum_{i=1}^{n} M_{i,j}\right)_{1 \leqslant j \leqslant p} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{j=1}^{p} M_{i,j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

de tailles (`size`) respectives $(1, p)$ et $(n, 1)$.

(b) À l'aide de la commande `histplot`, on a tracé les histogrammes des échantillons obtenus pour les couples $(n, \theta) = (10, 4)$, $(20, 4)$, $(40, 4)$ et $(50, 5)$.
À quels couples correspondent les figures suivantes ? (On pourra admettre que $I(\theta) = n/\theta$.)



12. Soit un entier $r \geqslant 1$. On suppose ici que $\varphi(\theta) = \theta^r$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad \text{et} \quad M_{r,n} = \frac{S_n(S_n-1) \times \ldots \times (S_n - r + 1)}{n^r}.$$

(a) Rappeler (sans démonstration) la loi de la variable aléatoire S_n ainsi que son espérance et sa variance.

(b) Démontrer que $M_{r,n}$ est un estimateur régulier de θ^r.
NB : Pour établir la propriété (R_3), on *admettra* que la série est absolument convergente.
En déduire que

$$\forall \theta > 0,\ \mathbf{V}(M_{r,n}) \geqslant \frac{r^2\theta^{2r-1}}{n}.$$

(c) Dans cette question, on suppose que $r = 2$. Calculer la variance de $M_{2,n}$ et démontrer que la suite d'estimateurs de θ^2

$$(M_{2,n})_{n \geqslant 1}$$

est convergente.

(d) Pour un entier $r \geqslant 1$ quelconque, la suite

$$(M_{r,n})_{n\geqslant 1}$$

d'estimateurs de θ^r est-elle convergente ? (On pourra commencer par calculer, en fonction de l'entier $k \in \mathbf{N}^*$ un équivalent de $\mathbf{E}(S_n^k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.)

Partie 4- Le cas $\varphi(\theta) = \theta$

Le contexte et les notations sont ceux des parties 2 et 3.
Dans cette partie, on compare deux estimateurs du paramètre inconnu θ.

13. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(a) Démontrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur régulier du paramètre θ.

(b) Que devient l'inégalité du 10.b) ?

On dit qu'un estimateur régulier de θ est efficace lorsque sa variance est minimale parmi les estimateurs réguliers de θ.

14. Soit Y un estimateur régulier de θ. Pour tout réel α, on pose

$$\psi(\alpha) = \overline{X_n} + \alpha(Y - \overline{X_n}).$$

(a) Vérifier que $\psi(\alpha)$ est un estimateur régulier de θ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

(b) En déduire que

$$\mathbf{Cov}(\overline{X_n}, Y) = \frac{\theta}{n}.$$

(c) Exprimer $\mathbf{V}(Y - \overline{X_n})$ en fonction de $\mathbf{V}(Y)$ et de $\mathbf{V}(\overline{X_n})$. En déduire qu'un estimateur efficace de θ est presque sûrement unique.

15. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$W_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^2.$$

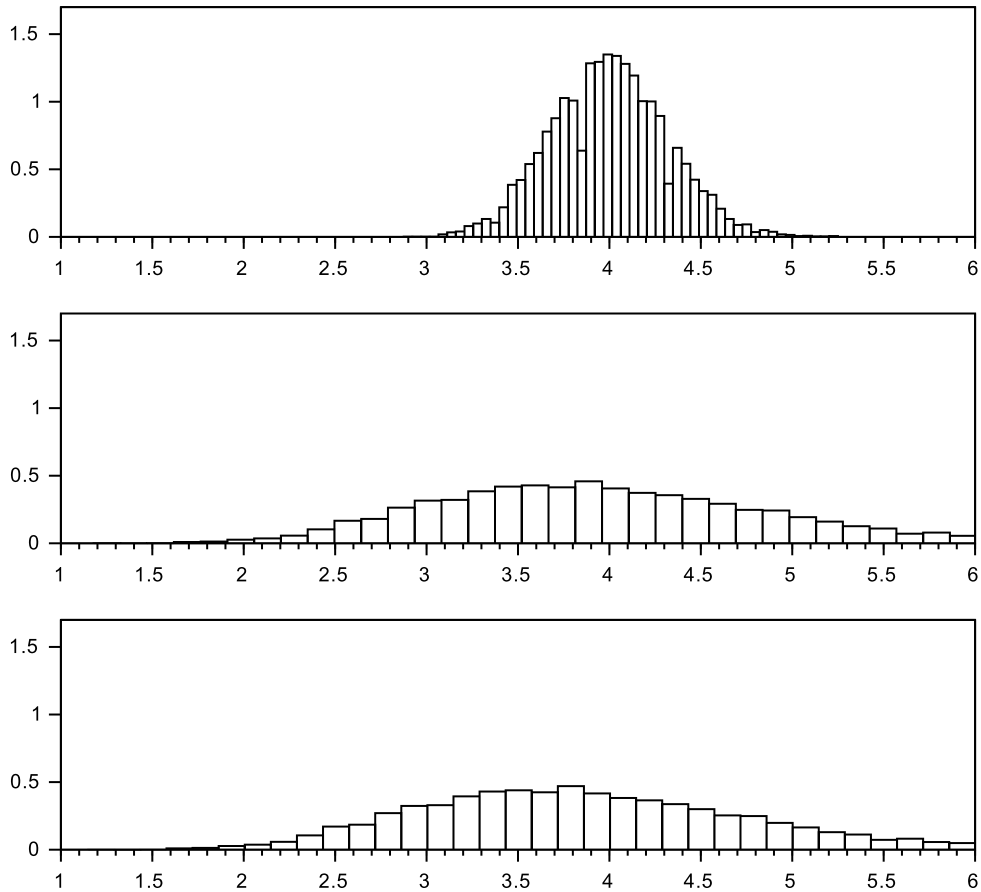
(a) Exprimer W_n en fonction de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ et de $\overline{X_n}^2$.

(b) Démontrer que W_n est un estimateur sans biais de θ.

(c) Démontrer que W_n admet une variance (qu'on ne cherchera pas à calculer).

(d) Étudier la convergence des deux suites d'estimateurs $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$ et $(W_n)_{n\geqslant 2}$ du paramètre inconnu θ.

On pourra démontrer que : si une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a \in \mathbf{R}$ et si deux suites $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires convergent en probabilité vers les réels y et z respectivement, alors la suite de variables aléatoires $(a_n(Y_n - Z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers le réel $a(y - z)$.



16. On simule des échantillons de N réalisations des estimateurs $\overline{X_n}$, W_n et

$$W'_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

avec $n = 50$. En comparant les figures suivantes, relier chaque histogramme à l'estimateur qui lui correspond.