

RÉSUMÉ DE COURS : LES SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Définitions de base et premières propriétés

Définition 1.1 Une série de terme général u_n est la donnée d'un couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$, où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique et où la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Dans tous les cas, la série de terme général u_n est notée $\sum u_n$, et la suite (S_n) est appelée la suite des sommes partielles (de la série). A noter qu'une série ne correspond en aucun cas à une vraie somme, puisqu'une série n'a pas de bornes de sommation. A noter aussi que, dans cette définition, la série démarre à l'ordre 0. Bien entendu, on peut la faire démarrer à n'importe quel ordre $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on pourra la noter $\sum_{n \geq n_0} u_n$, et ce afin de préciser à quel ordre démarre la série en question, mais la notation $\sum u_n$ reste valable s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 1.2 On dit que la série $\sum u_n$ (ou de terme général u_n) converge (ou est convergente) si la suite (S_n) des sommes partielles converge. Sinon, on dit que la série $\sum u_n$ diverge. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la limite de la suite (S_n) est appelée la somme de la série et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

En d'autres termes, on voit qu'en cas de convergence de la série $\sum u_n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

En général, étant donnée une série $\sum u_n$, les deux questions principales que l'on se pose sont les suivantes. Est-ce que la série $\sum u_n$ converge ou non ? Si oui, quelle est sa somme ? La première question correspond à l'étude de la nature de la série. Plus précisément, déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou pas (sans nécessairement calculer sa somme en cas de convergence).

Remarque 1.3 Un premier exemple remarquable de série est donné par les séries dites "télescopiques", c'est-à-dire dont le terme général u_n est de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$, où (v_n) est une suite donnée. Dans ce cas, on obtient par sommation que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0.$$

Dès lors, on voit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (v_n) converge, et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Il ne reste plus alors qu'à étudier le comportement de la suite (v_n) pour connaître celui de la série $\sum u_n$. Réciproquement, pour étudier la nature d'une suite (v_n) , il peut être commode de se ramener à l'étude de la série $\sum u_n$, où $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.4 Soit $\sum u_n$ une série convergente, de somme S . On appelle reste d'ordre n de la série le réel $R_n = S - S_n$.

En cas de convergence de $\sum u_n$, on montre alors facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Théorème 1.5 Le reste d'une série convergente $\sum u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0.$$

Théorème 1.6 Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Ce résultat nous fournit un critère facile pour déterminer la nature d'une série. Plus précisément, pour vérifier qu'une série converge, on pourra commencer par contrôler que son terme général tend bien vers 0. À noter que ce résultat n'est pas une équivalence. En effet, on verra plus loin qu'il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0 (c'est le cas notamment de la série harmonique). Dans la pratique, on utilisera plutôt ce résultat sous sa forme contraposée, c'est-à-dire :

si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Théorème 1.7 Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors elles sont de même nature.

En particulier, deux séries qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes convergent ou divergent simultanément. Dès lors, pour étudier la nature d'une série donnée, on peut ne pas tenir compte de ses premiers termes.

Théorème 1.8 (Linéarité) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En d'autres termes, ce résultat nous dit que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel (puisque l'on peut y faire des combinaisons linéaires) et que la somme sur cet espace vectoriel est une application linéaire (puisque'elle transforme une combinaison linéaire en une combinaison linéaire). Attention ici, pour pouvoir appliquer le théorème 1.8, il faudra toujours vérifier au préalable que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent bien. En effet, il se peut très bien que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge sans que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et dans ce cas, appliquer le théorème 1.8 n'a pas de sens !

2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux séries dont le terme général est toujours positif. Plus précisément, nous allons développer plusieurs critères de convergence pour de telles séries, lesquels nous serviront constamment par la suite. À noter que ces critères ne nous donneront que la nature des séries en question (et non leur somme).

Théorème 2.1 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, c'est-à-dire telle que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite (S_n) des sommes partielles est croissante. De plus, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée. En revanche, si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Théorème 2.2 (Critère de comparaison des séries à termes positifs) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Dans la pratique, pour montrer qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs converge, on cherchera à majorer son terme général u_n par le terme général v_n (bien souvent plus simple) d'une série $\sum v_n$ que l'on sait convergente. De la même manière, pour montrer qu'une série $\sum v_n$ à termes positifs diverge, on cherchera à minorer son terme général v_n par le terme général u_n d'une série $\sum u_n$ que l'on sait divergente.

Théorème 2.3 (Critère d'équivalence des séries à termes positifs) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang). Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire convergent ou divergent simultanément.

Dans la pratique, ce résultat s'applique comme suit. Pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$ à termes positifs, on calculera un équivalent v_n de son terme général u_n , suffisamment simple pour que l'on puisse dire si oui ou non la série $\sum v_n$ converge. Dès lors, on conclura en disant que la série $\sum u_n$ converge si $\sum v_n$ converge, ou que la série $\sum u_n$ diverge si $\sum v_n$ diverge. À noter que ce critère s'applique aussi dans le cas de séries dont les termes généraux u_n et v_n sont négatifs (au moins à partir d'un certain rang). En effet, il suffit pour cela de remplacer u_n, v_n par $-u_n, -v_n$ et d'utiliser le théorème 1.8.

3 Séries absolument convergentes

Définition 3.1 Une série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3.2 Toute série absolument convergente est convergente.

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur le fait que *toute série absolument convergente est la différence de deux séries convergentes à termes positifs*. Plus précisément, si $\sum u_n$ converge absolument, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \max\{u_n, 0\} \quad \text{et} \quad b_n = \max\{-u_n, 0\}.$$

On vérifie alors aisément que $0 \leq a_n \leq |u_n|$, $0 \leq b_n \leq |u_n|$ et $u_n = a_n - b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont à termes positifs et de plus, elles convergent d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs (vu que $\sum |u_n|$ converge). Dès lors, par linéarité, la série $\sum u_n$ converge comme différence des séries convergentes $\sum a_n$ et $\sum b_n$, d'où le résultat.

De façon générale, pour montrer qu'une série dont les termes ne sont pas tous positifs (au moins à partir d'un certain rang) converge, on pourra commencer par vérifier que cette série est absolument convergente, et ce à l'aide des critères précédents. A noter que le théorème 3.2 n'est pas une équivalence. Plus précisément, il existe des séries dites *semi-convergentes*, c'est-à-dire convergentes mais pas absolument convergentes. C'est le cas notamment de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 3.3 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}.$$

En d'autres termes, *une série absolument convergente reste absolument absolument convergente et sa somme reste la même si l'on change l'ordre de sommation de ses termes*. Une des conséquences de l'absolue convergence (et notamment du théorème 3.2) est donnée par le :

Théorème 3.4 (Critère de négligeabilité) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Si $\sum v_n$ est convergente, à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang) et si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge.

Dans la pratique, pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge, on cherchera à montrer que son terme général u_n est négligeable devant le terme général v_n d'une série $\sum v_n$ à termes positifs que l'on sait convergente. A noter que, comment précédemment, ce critère s'applique aussi dans le cas où la série $\sum v_n$ est à termes négatifs (au moins à partir d'un certain rang). En effet, il suffit pour cela de remplacer u_n, v_n par $-u_n, -v_n$ et d'utiliser le théorème 1.8.

4 Séries usuelles

Dans cette partie, nous allons présenter quelques séries de référence auxquelles on ramènera très souvent l'étude générale des séries (notamment celle de leur nature).

Définition 4.1 On appelle *série de Riemann* toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

Théorème 4.2 La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En particulier, on voit que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Cet exemple très classique de série divergente dont le terme général tend vers 0 porte le nom de *série harmonique*. On retiendra donc que :

la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

A noter que les séries de Riemann, en association avec les critères de convergence, servent bien souvent à déterminer la nature d'une série donnée. Plus précisément, considérons une série $\sum u_n$ à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), et supposons qu'il existe un réel α tel que :

$$n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}.$$

Si $l \neq 0$, alors on voit que $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ et on obtient que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. En particulier, la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$. De même, si $l = 0$ et si $\alpha > 1$, alors on voit que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ et donc la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de négligeabilité.

Définition 4.3 On appelle série exponentielle toute série de la forme $\sum \frac{x^k}{k!}$, où $x \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

Théorème 4.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et de plus : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

A noter que les séries exponentielles, en association avec les critères de convergence, peuvent être utilisées pour déterminer la nature d'une série donnée. Par exemple, considérons une série $\sum u_n$, et supposons qu'il existe un réel $x \geq 0$ fixé tel que $0 \leq u_n \leq \frac{x^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (au moins à partir d'un certain rang). Alors le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne que la série $\sum u_n$ converge.

Définition 4.5 Si $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^k$ est appelée la série géométrique (de raison q).

Définition 4.6 Si $(q, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, la série $\sum k(k-1)\dots(k-p+1)q^{k-p}$ est appelée la série géométrique dérivée d'ordre p (et de raison q).

En particulier, comme $\binom{k}{0} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on voit que la série géométrique dérivée d'ordre 0 n'est ni plus ni moins que la série géométrique de raison q . A noter que, par définition des coefficients binomiaux :

$$\sum_{k \geq p} \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} q^{k-p} = \sum \binom{k}{p} q^{k-p}.$$

En particulier, cette série ne démarre véritablement qu'à partir de l'indice $k = p$ (vu que tous les termes précédents sont nuls).

Théorème 4.7 Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors la série géométrique dérivée d'ordre p converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-p+1)q^{k-p} = \frac{p!}{(1-q)^{p+1}}.$$

En d'autres termes, on obtient que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout réel q tel que $|q| < 1$:

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} q^{k-p} = \frac{1}{(1-q)^{p+1}}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule du binôme négatif*. En particulier, pour $p = 0, 1, 2$, on voit que les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$, et que de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

On retiendra tout particulièrement ces formules, qui nous serviront beaucoup en Théorie des Probabilités. A noter que les théorèmes 4.4 et 4.7 ont ceci de remarquable que, non seulement ils nous permettent de déterminer la nature des séries exponentielles et géométriques, mais en plus ils nous en donnent la somme (en cas de convergence). On utilisera donc fréquemment ces résultats pour calculer la somme d'une série convergente, en association avec le théorème 1.8. Plus précisément, pour calculer la somme d'une série $\sum u_n$ convergente, on écrira le terme général u_n comme combinaison linéaire de termes généraux de séries télescopiques et usuelles (exponentielles, géométriques, etc), puis on conclura par linéarité.