RÉSUMÉ DE COURS : INTÉGRALES IMPROPRES

1 Définitions de base et premières propriétés

Dans ce chapitre, on se propose de revoir la notion d'intégrale impropre vue en première année, ainsi que les techniques de calcul associées (intégration par parties, changement de variable, etc).

Définition 1.1

1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, où $a < b \leq +\infty$. On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est impropre ou généralisée en b.*
2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$, où $-\infty \leq a < b$. On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est impropre ou généralisée en a.*

A noter que les intégrales peuvent être impropres en des bornes finies ou infinies. A titre d'exemple, les intégrales $\int_0^1 \ln(1-t)dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ sont impropres (en leurs bornes de droite). En outre, les intégrales $\int_0^1 \ln(t)dt$ et $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ sont impropres (en leurs bornes de gauche).

Définition 1.2

1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b, et qu'elle diverge sinon. En cas de convergence, on pose alors :*
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$
2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si la fonction $x \longmapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers a, et qu'elle diverge sinon. En cas de convergence, on pose alors :*
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt.$$

En général, tout comme pour les séries numériques, les deux questions principales que l'on se pose au vu d'une intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ sont les suivantes. Est-ce que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge ou non ? Si oui, que vaut $\int_a^b f(t)dt$? La première question correspond à l'étude de la nature de l'intégrale impropre. Plus précisément, déterminer la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou pas (sans nécessairement la calculer en cas de convergence).

Remarque 1.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si F est une primitive de f sur $[a,b[$, alors on voit que, pour tout $x \in [a,b[$:*
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$
En particulier, on constate que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F admet une limite finie en b, et dans ce cas :
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a).$$
De même, si f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, et si F est une primitive de f sur $]a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a, et dans ce cas :
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - \lim_{x\to a} F(x).$$
En d'autres termes, si l'on dispose d'une primitive explicite F de f sur $[a,b[$ (resp. sur $]a,b]$), on peut ainsi ramener l'étude de la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ et son calcul en cas de convergence, à celui de l'existence et de la valeur de la limite de F quand x tend vers b (resp. quand x tend vers a).

Théorème 1.4

1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$, où $b \in \mathbb{R}$. Si f est prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre. Dans ce cas, si $\widetilde{f}$ désigne le prolongement par continuité de f en b, alors :*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt.$$
2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$, où $a \in \mathbb{R}$. Si f est prolongeable par continuité en a, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre. Dans ce cas, si $\widetilde{f}$ désigne le prolongement par continuité de f en a, alors :*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt.$$

A noter que les intégrales faussement impropres représentent les cas les plus simples d'intégrales impropres. En effet, dans ces cas, il suffit de remplacer la fonction à intégrer par son prolongement par continuité. A titre d'exemple, on vérifiera sans peine que les intégrales impropres $\int_0^1 t\ln(t)dt$ et $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ sont en fait faussement impropres, puisque les fonctions à intégrer admettent une limite finie en 0. **A noter aussi qu'une intégrale est toujours faussement impropre en une borne finie, jamais en une borne infinie !** Bien sûr, les définitions précédentes s'étendent aux deux bornes de l'intégrale. Plus précisément :

Définition 1.5 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge si, étant donné un réel $c \in]a, b[$, les intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent toutes les deux, et sinon qu'elle diverge. En cas de convergence, on pose alors :*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On dit quelquefois que l'intégrale en question est "doublement impropre" (en a et en b). Comme précédemment, on voit que, si l'on peut calculer explicitement une primitive F de f sur $]a, b[$, alors :
$$\int_x^y f(t)dt = F(y) - F(x).$$

En particulier, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F admet une limite finie en a et en b, et dans ce cas :
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{y \to b} F(y) - \lim_{x \to a} F(x).$$

A noter que la convergence et la valeur d'une intégrale doublement impropre (en cas de convergence) ne dépendent pas du réel c choisi dans la définition 1.5. Bien entendu, la notion de convergence d'une intégrale impropre se généralise aux cas des fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, où $a \in \mathbb{R}$. Plus précisément, soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, où $a \in \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si les intégrales $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent toutes les deux et dans ce cas, on pose :
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.}$$

2 Propriétés des intégrales impropres

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les premières propriétés des intégrales impropres. Pour des raisons de simplicité, nous ne donnerons la plupart de ces résultats que dans le cas d'une impropreté sur la borne de droite, et nous préciserons à chaque fois si le résultat en question s'étend au cas d'une impropreté quelconque (voire d'une double impropreté).

Théorème 2.1 (Linéarité) *Soit* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$*, et soient* f, g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si les intégrales impropres* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors l'intégrale impropre* $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ *converge, et de plus :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

En d'autres termes, ce résultat nous dit que l'ensemble des intégrales impropres convergentes est un espace vectoriel (puisque l'on peut y faire des combinaisons linéaires) et que la valeur de l'intégrale impropre sur cet espace vectoriel est une application linéaire (puisqu'elle transforme une combinaison linéaire en une combinaison linéaire). Attention ici, pour pouvoir appliquer le théorème 2.1, il faudra toujours vérifier au préalable que les intégrales impropres de droite convergent bien. En effet, il se peut très bien que l'intégrale de gauche converge sans que les intégrales de droite convergent, et dans ce cas, appliquer le théorème 2.1 n'a pas de sens ! A noter enfin que ce résultat est encore valable si l'impropreté porte sur la borne de gauche (au lieu de celle de droite) ou en cas de double impropreté.

Théorème 2.2 (Relation de Chasles) *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, alors* $\int_c^b f(t)dt$ *converge pour tout* $c \in [a, b[$*, et de plus :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Remarque 2.3 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b[$*, où* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, telle que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge. D'après la relation de Chasles, on trouve que :*

$$\int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \underset{x \to b}{\longrightarrow} 0.$$

De même, si f *est une fonction continue sur un intervalle* $]a, b]$*, où* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, et si l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, alors on obtient avec la relation de Chasles que :*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_x^b f(t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 2.4 (Positivité) *Soit* f *une fonction continue et* <u>*positive*</u> *sur* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$*.*

Théorème 2.5 (Stricte positivité) *Soit* f *une fonction continue et* <u>*positive*</u> *sur* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge et si* $\int_a^b f(t)dt = 0$*, alors* f *est nulle sur* $[a, b[$*.*

A noter que, par contraposée, la stricte positivité peut s'énoncer comme suit : "*Si* f *est continue, positive, non identiquement nulle sur* $[a, b[$ *et si l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)dt > 0$". Par la suite, on retiendra plutôt la forme donnée dans le théorème 2.5, qui est de loin la plus utilisée.

Théorème 2.6 (Croissance) *Soient* f, g *deux fonctions continues sur* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si, pour tout* $t \in [a, b[$*, on a* $f(t) \leq g(t)$*, et si* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$*.*

A noter que la relation de Chasles, ainsi que les propriétés de positivité, de stricte positivité et de croissance, restent encore valables si l'impropreté porte sur la borne de gauche (au lieu de celle de droite) ou en cas de double impropreté. Passons maintenant aux méthodes de calculs sur les intégrales impropres.

Théorème 2.7 (Intégration par parties) *Soient* u, v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[a, b[$*, où* $a < b \leq +\infty$*. Si le produit* uv *admet une limite finie en* b*, alors les intégrales impropres* $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ *et* $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ *sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \lim_{x \to b} (uv)(x) - (uv)(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Par des intégrales de même nature, on sous-entend qu'elles convergent ou divergent simultanément. A noter que la formule d'intégration par parties reste encore valable si l'impropreté porte sur la borne de gauche (et non de droite) ou en cas de double impropreté. Plus précisément, soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a, b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si le produit uv admet une limite finie en a et en b, alors les intégrales impropres $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = \lim_{x\to b}(uv)(x) - \lim_{x\to a}(uv)(x) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.}$$

De façon générale, on retiendra que, *pour effectuer une intégration par parties dans une intégrale impropre, on commencera d'abord par se ramener à une intégrale bien définie sur un segment, puis on passera à la limite dans la/les borne(s) concernée(s).*

Théorème 2.8 (Changement de variable) *Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, soit f une fonction continue sur $]a, b[$, et soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt & \text{si } \varphi \text{ est strictement croissante} \\ \displaystyle\int_a^b f(u)du = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt & \text{si } \varphi \text{ est strictement décroissante} \end{cases}.$$

A noter qu'en cas de convergence, les intégrales ci-dessus sont égales au signe près. A noter de plus que l'intégration par parties et le changement de variable permettent non seulement de déterminer la nature d'une intégrale impropre, mais aussi d'en calculer la valeur (en cas de convergence). Dans la pratique, on utilisera ces résultats de la façon suivante. Par une succession d'intégrations par parties et de changements de variable, on ramènera une intégrale impropre donnée à une intégrale impropre plus simple, dont on connaît la nature, voire la valeur (en cas de convergence). Ensuite, on conclura sur la nature et la valeur éventuelle de cette intégrale. A noter enfin qu'à l'aide du changement de variable $x = -t$, on montre le :

Corollaire 2.9 *Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si f est paire et si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt$.*
2. *Si f est impaire et si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.*

3 Intégrales impropres de fonctions positives

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques propriétés des intégrales impropres de fonctions positives. Plus précisément, nous allons développer plusieurs critères de convergence pour ce type d'intégrales, lesquels nous serviront constamment par la suite. A noter que ces critères ne nous donneront que la nature des intégrales en question (et non leur valeur en cas de convergence). Pour des raisons de simplicité, nous ne donnerons ces résultats que dans le cas d'une impropreté sur la borne de droite, mais ces derniers s'étendent sans problème au cas d'une impropreté sur la borne de gauche.

Théorème 3.1 *Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a, b[$, où $a < b \leq +\infty$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$.*

Théorème 3.2 (Critère de comparaison) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $a < b \leq +\infty$. On suppose qu'il existe un réel $c \in [a, b[$ tel que : $\forall t \in [c, b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.*

1. *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
2. *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Dans la pratique, pour montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction f continue positive converge, on cherchera à majorer la fonction f par une fonction g dont on sait que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge. De la même manière, pour montrer que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ d'une fonction g continue positive diverge, on cherchera à minorer la fonction g par une fonction f dont on sait que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Théorème 3.3 (Critère d'équivalence) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $a < b \leq +\infty$. S'il existe un réel $c \in [a, b[$ tel que f et g soient* <u>*positives*</u> *sur $[c, b[$, et si $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Dans la pratique, ce résultat s'applique comme suit. Pour déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction f continue positive, on calculera un équivalent g de f au voisinage de b, assez simple pour que l'on puisse dire si oui ou non l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, et on conclura quant à la nature de l'intégrale de départ. A noter que ce critère s'applique aussi dans le cas de fonctions f, g négatives (au moins au voisinage de b). En effet, il suffit pour cela de remplacer f, g par $-f, -g$ et d'utiliser la linéarité.

4 Convergence absolue

Définition 4.1 *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

Théorème 4.2 *Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.*

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur le fait que *toute fonction f continue sur $]a, b[$, dont l'intégrale impropre sur $]a, b[$ converge absolument, est la différence de deux fonctions continues positives sur $]a, b[$ dont les intégrales impropres sur $]a, b[$ convergent.* Plus précisément, si $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, on pose pour tout $t \in]a, b[$:

$$g(t) = \max\{f(t), 0\} \quad \text{et} \quad h(t) = \max\{-f(t), 0\}.$$

On vérifie alors aisément que les fonctions g, h sont continues sur $]a, b[$ et que de plus, on a $0 \leq g(t) \leq |f(t)|$, $0 \leq h(t) \leq |f(t)|$, $f(t) = g(t) - h(t)$ pour tout $t \in]a, b[$. En particulier, les fonctions g et h sont continues positives et les intégrales impropres $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b h(t)dt$ convergent d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives (vu que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge). Dès lors, par linéarité, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge comme différence des intégrales convergentes $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b h(t)dt$.

De façon générale, pour montrer que l'intégrale d'une fonction continue mais non nécessairement de signe constant converge, on pourra commencer par établir que cette intégrale est absolument convergente, ce que l'on peut vérifier à l'aide des critères précédents. A noter que le théorème 4.2 n'est pas une équivalence. Plus précisément, il existe des intégrales impropres dites *semi-convergentes*, c'est-à-dire convergentes mais pas absolument convergentes. C'est le cas notamment de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Théorème 4.3 (Inégalité triangulaire) *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors :*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Cette inégalité est notamment très pratique pour majorer des intégrales qui sont difficiles à calculer explicitement ou dont on ne demande pas le calcul explicite. On en verra au cours de l'année des interprétations en Théorie des Probabilités.

Théorème 4.4 (Critère de négligeabilité) *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $a < b \leq +\infty$. S'il existe un réel $c \in [a, b[$ tel que g soit* <u>*positive*</u> *sur $[c, b[$, si $f(t) \underset{t \to b}{=} o(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*

Dans la pratique, pour montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction f continue converge, on cherchera à montrer que la fonction f est négligeable devant une fonction g continue positive dont l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge. A noter que, comme précédemment, ce critère s'applique aussi dans le cas d'une fonction g négative (au moins au voisinage de b). En effet, il suffit pour cela de remplacer g par $-g$ et d'utiliser la linéarité. A noter enfin que ce résultat est encore valable dans le cas d'une impropreté sur la borne de gauche (et non plus de droite).

5 Intégrales de référence

Dans cette partie, nous allons présenter quelques intégrales impropres de référence auxquelles on ramènera très souvent l'étude générale des intégrales impropres (notamment celle de leur nature).

Définition 5.1 *Soient α, a, b des réels tels que $a < b$. Les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont appelées des intégrales de Riemann (de paramètre α).*

A noter que la première intégrale ci-dessus est impropre en a, et que la deuxième est impropre en $+\infty$.

Théorème 5.2 (Critère de convergence de Riemann) *Soient α, a, b des réels tels que $a < b$.*

1. *L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*
2. *L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

En particulier, on retiendra (si $a = 0$ et $b = 1$) que :

$$\boxed{\text{l'intégrale impropre } \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.}$$

De même, on obtient avec la relation de Chasles que, pour tout $b > 0$:

$$\boxed{\text{l'intégrale impropre } \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

A noter que les intégrales de Riemann, en association avec les critères de convergence, servent bien souvent à déterminer la nature d'une intégrale impropre donnée. Plus précisément, considérons une intégrale impropre de la forme $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, et supposons qu'il existe un réel α tel que :

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}.$$

Si $l \neq 0$ et si f est positive sur $[a, +\infty[$ (ou plus généralement au voisinage de $+\infty$), alors on voit que $f(t) \sim_{+\infty} \frac{l}{t^\alpha}$ et on obtient que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$. De même, si $l = 0$ et si $\alpha > 1$, alors on voit que $f(t) =_{+\infty} o(\frac{1}{t^\alpha})$ et donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge d'après le critère de négligeabilité.

Théorème 5.3 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.*

On peut même préciser la valeur de cette intégrale, et montrer facilement que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}.}$$

Théorème 5.4 *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.*

Définition 5.5 *La fonction gamma d'Euler est l'application $\Gamma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Théorème 5.6 *Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.*

On aura l'occasion de rencontrer d'autres intégrales impropres convergentes, notamment en Théorie des Probabilités. A titre d'exemple, on montre et nous admettrons que les intégrales ci-dessous (appelées intégrales gaussiennes) convergent et que, de plus :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}.}$$