RÉSUMÉ DE COURS : ESPACES VECTORIELS

1 Notion d'espace vectoriel

Dans cette partie, nous allons introduire la notion d'espace vectoriel. Grosso modo, un espace vectoriel est un ensemble E muni de deux opérations dites respectivement interne et externe, à savoir l'addition sur E et la multiplication sur E par les scalaires (c'est-à-dire les réels). Plus précisément, on a la :

Définition 1.1 *Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un ensemble E muni de deux opérations, notées respectivement $+ : E \times E \longrightarrow E$ et $. : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, qui vérifient les conditions suivantes :*

1. (a) *Pour tous $x, y, z \in E$, on a : $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de $+$).*
   (b) *Il existe un élément de E, noté 0_E, tel que, pour tout $x \in E$, on a : $x + 0_E = 0_E + x = x$ (élément neutre).*
   (c) *Pour tout élément $x \in E$, il existe un élément de E, noté $-x$, tel que : $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$ (élément symétrique ou opposé).*
   (d) *Pour tous $x, y \in E$, on a : $x + y = y + x$ (commutativité).*
2. (a) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in E$, on a : $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.*
   (b) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$, on a : $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$.*
   (c) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$, on a : $(\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$.*
   (d) *Pour tout $u \in E$, on a : $1.u = u$.*

A noter que ces opérations vérifient bien ce qu'on attend d'elles, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes propriétés algébriques que l'addition et la multiplication par les scalaires sur $\mathbb{R}$. Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*. Dans certains cas, on les notera avec une flèche (notamment s'il s'agit de vecteurs du plan ou de l'espace). En d'autres termes, les vecteurs sont des objets que l'on peut additionner entre eux et multiplier par des constantes. **Par la suite et pour simplifier les notations, on parlera d'espace vectoriel plutôt que d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$-espace vectoriel**. A noter que, dans un espace vectoriel E, on a les propriétés suivantes :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)\,.}$$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad -(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x).}$$

Nous allons maintenant donner quelques espaces vectoriels de référence. Ces exemples sont évidemment à connaître par cœur :

Exemple 1.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de $\mathbb{R}$ de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles, définies pour tous $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par :*

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda.x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

Muni de ces opérations, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.3 *L'ensemble $\mathbb{R}[x]$, muni de l'addition et de la multiplication des polynômes par les scalaires, est un espace vectoriel. A noter qu'un élément P de $\mathbb{R}[x]$ poura être indifféremment noté sous la forme $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ou $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$.*

Exemple 1.4 *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{R}$ de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles. Muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.*

Exemple 1.5 *On munit l'ensemble $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ des suites numériques réelles de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles, définies pour tous $u, v \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u + v)_n = u_n + v_n \quad \text{et} \quad (\lambda.u)_n = \lambda u_n.$$

Muni de ces opérations, l'ensemble $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.

Exemple 1.6 *Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ des applications de X dans $\mathbb{R}$ de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles, définies pour tous $f, g \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

Muni de ces opérations, l'ensemble $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel et soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide et s'il est stable par addition et par multiplication scalaire, c'est-à-dire :*

1. *Pour tous $x, y \in F$, $x + y$ appartient à F.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in F$, λx appartient à F.*

A noter que $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E. En utilisant la définition axiomatique des espaces vectoriels, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel.*

Exemple 2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\leq n$, muni de l'addition et de la multiplication des polynômes par les scalaires, est un espace vectoriel.*

Exemple 2.4 *L'ensemble des n-uplets de $\mathbb{R}^n$ solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. A noter que ceci n'est pas un résultat admis, et qu'il faut le démontrer à chaque fois.*

Théorème 2.5 *Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, et si de plus :*

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall(x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

On peut résumer le théorème précédent en disant qu'*une partie F non vide de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle est stable par combinaisons linéaires.* L'intérêt de ce résultat vient de ce qu'il permet de montrer facilement qu'un ensemble est un espace vectoriel sans en vérifier tous les axiomes, de la manière suivante. *Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on choisit d'abord un espace vectoriel E connu dont il est une partie, puis on montre que F est un sous-espace vectoriel de E (ce qui entraine que F est un espace vectoriel). Pour ce faire, on vérifie que F est non vide (en montrant par exemple que $0_E \in F$) et stable par combinaisons linéaires.*

Théorème 2.6 *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est lui-même un sous-espace vectoriel de E.*

3 Familles de vecteurs

Définition 3.1 *Soit E un espace vectoriel. Une famille finie de E est un k-uplet $(e_1, ..., e_k)$ d'éléments de E, avec $k > 0$.*

Définition 3.2 *Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille finie d'un espace vectoriel E. Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de $(e_1, ..., e_k)$ s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que : $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k$.*

3.1 Familles libres

Définition 3.3 *On dit qu'une famille finie $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est libre, ou que les vecteurs $e_1, ..., e_k$ sont linéairement indépendants, si :*

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0).$$

Une famille finie qui n'est pas libre est dite liée.

En d'autres termes, une famille de vecteurs est libre si toute combinaison linéaire de vecteurs de cette famille, qui donne le vecteur nul, a tous ses coefficients nuls. *A noter que la famille (0_E) est toujours liée, que toute famille contenant le vecteur nul est liée et que la famille (e_1) est liée si et seulement si $e_1 = 0_E$.*

Théorème 3.4 *Une famille finie $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

En particulier, on voit qu'une famille liée reste liée si l'on permute ses vecteurs entre eux. De même, *une famille (e_1, e_2) de vecteurs d'un espace vectoriel E est liée si et seulement si les vecteurs e_1, e_2 sont proportionnels. Dans ce cas, on dit que les vecteurs e_1 et e_2 sont colinéaires.*

Théorème 3.5 *Une famille finie $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est libre si et seulement si, chaque fois que deux combinaisons linéaires de ses vecteurs sont égales, leurs coefficients sont tous égaux, c'est-à-dire :*

$$\forall(\lambda_1, .., \lambda_k, \mu_1, .., \mu_k) \in \mathbb{R}^{2k}, \ (\lambda_1 e_1 + .. + \lambda_k e_k = \mu_1 e_1 + .. + \mu_k e_k \implies \lambda_1 = \mu_1, .., \ \lambda_k = \mu_k).$$

En particulier, on voit qu'une famille libre reste libre si l'on permute ses vecteurs entre eux.

Théorème 3.6 *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

En particulier, on retiendra *qu'une famille contenant le vecteur nul est liée, et qu'une famille contenant deux vecteurs proportionnels est aussi liée.* De façon générale, pour déterminer si une famille $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est libre ou liée, on commence par poser l'équation :

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k = 0_E,$$

que l'on interprète le plus souvent sous la forme d'un système linéaire homogène. On résout alors ce système linéaire, et on conclut de la façon suivante. *Si ce système n'admet que $(0, ..., 0)$ comme solution, alors $(e_1, ..., e_k)$ est libre. Si par contre ce système admet une solution $\neq (0, ..., 0)$ (et dans ce cas, il en admet une infinité), alors $(e_1, ..., e_k)$ est liée.* On retiendra aussi le :

Théorème 3.7 *Tout famille finie de polynômes, de degrés deux à deux distincts, est libre.*

En particulier, on voit que toute famille $(P_0, ..., P_n)$ de polynômes de degrés échelonnés, c'est-à-dire telle que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, est libre.

3.2 Familles génératrices

Théorème - définition 3.8 *Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille finie d'un espace vectoriel E. Alors l'ensemble $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \{u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k | \ (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_k)$.*

En d'autres termes, l'espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_k)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $e_1, ..., e_k$. A noter que, si $e_1, ..., e_k$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E, alors toute combinaison linéaire de $e_1, ..., e_k$ appartient encore à F, vu que F est stable par combinaisons linéaires, et donc $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) \subset F$. En particulier, on voit que $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) qui contient $e_1, ..., e_k$.

Définition 3.9 *Soit E un espace vectoriel. Une famille finie $(e_1, ..., e_k)$ de vecteurs de E est dite génératrice dans E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_k$, c'est-à-dire :*

$$\forall u \in E, \quad \exists(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k.$$

Théorème 3.10 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, et soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_k)$ une famille finie de F. Alors $\mathcal{F}$ est génératrice dans F si et seulement si $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$.*

A noter qu'une méthode très efficace pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E consiste à montrer que F est l'espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E que l'on détermine. Ceci permet au passage d'exhiber une famille génératrice de F, à savoir $\mathcal{F}$!

Théorème 3.11 *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

A noter qu'un espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F}$ a ceci de particulier qu'il ne change pas si l'on applique certaines transformations élémentaires à $\mathcal{F}$. Plus précisément :

Théorème 3.12 *Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_k)$ une famille d'un espace vectoriel E. Alors l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ ne change pas :*

1. *si l'on permute les vecteurs de $\mathcal{F}$ entre eux,*
2. *si l'on multiplie l'un des e_i par une constante non nulle,*
3. *si l'on remplace l'un des e_i par $e_i + \lambda e_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \neq i$.*

En particulier, les familles génératrices restent génératrices si on leur applique ces mêmes transformations élémentaires. Plus précisément :

Corollaire 3.13 *Une famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_k)$ génératrice dans E reste génératrice dans E :*

1. *si l'on permute les vecteurs de $\mathcal{F}$ entre eux,*
2. *si l'on multiplie l'un des e_i par une constante non nulle,*
3. *si l'on remplace l'un des e_i par $e_i + \lambda e_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \neq i$.*

A noter que ces règles permettent bien souvent de montrer qu'une famille est génératrice, en se ramenant à des familles de vecteurs plus simples. A noter aussi l'analogie avec la résolution des systèmes linéaires, où la méthode du pivot de Gauss permet de transformer un système linéaire compliqué en un système dit *réduit*, c'est-à-dire sous forme triangulaire, et donc plus simple. De façon générale, pour déterminer si une famille $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est génératrice dans E, on pose pour tout $u \in E$ l'équation :

$$u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k,$$

que l'on interprète le plus souvent sous la forme d'un système linéaire. On résout alors ce système linéaire, et on conclut de la façon suivante : *la famille $(e_1, ..., e_k)$ est génératrice dans E si et seulement si ce système admet au moins une solution pour tout $u \in E$.*

4 Base et dimension d'un espace vectoriel

Définition 4.1 *Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.*

Définition 4.2 *Une famille finie $(e_1, ..., e_k)$ d'un espace vectoriel E est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice dans E.*

En d'autres termes, une famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire des e_i, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall u \in E, \quad \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k.}$$

Dans ce cas, les scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont appelés *les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur colonne des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$, noté $u_{\mathcal{B}}$ ou $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, est la colonne* :

$$u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la famille $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, définie pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ par $e_i = (0, .., 1, .., 0)$ (avec le 1 en i-ème position) est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 4.4 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la famille $(1, x, ..., x^n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, que l'on appelle la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.*

Exemple 4.5 *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui vaut 1. Alors la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

A noter que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont de dimension finie.

Théorème 4.6 *Soient $e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_l$ des vecteurs d'un espace vectoriel E tels que la famille $\mathcal{L} = (e_1, ..., e_k)$ est libre et la famille $\mathcal{G} = (e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_l)$ génératrice. Alors il existe une famille $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{L}$, contenue dans $\mathcal{G}$ et qui est une base de E.*

En d'autres termes, *on retiendra qu'entre une famille finie libre et une famille finie génératrice qui la contient, il existe toujours une base*! Une des conséquences de ce résultat est le :

Théorème 4.7 (de la base incomplète) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$. Alors toute famille libre peut être complétée en une base de E. De plus, de toute famille génératrice dans E, on peut extraire une base de E.*

Théorème 4.8 *Tout espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$, admet une base.*

Théorème - définition 4.9 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre commun est appelé la dimension de E et noté* $\dim E$.

Par convention, une base de $\{0_E\}$ est l'ensemble vide et la dimension de $\{0_E\}$ est égale à 0.

Exemple 4.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemple 4.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :* $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Exemple 4.12 *Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on a :* $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.

Théorème 4.13 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :*

1. *toute famille libre de E a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de E à n éléments est une base,*
3. *toute famille génératrice de E a au moins n éléments,*
4. *toute famille génératrice de E à n éléments est une base.*

Corollaire 4.14 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice dans E, alors* $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{G})$.

En général, pour déterminer qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est une base d'un espace vectoriel E, on doit montrer que $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice de E, ce qui conduit bien souvent à résoudre deux systèmes linéaires. Un des grands intérêts du théorème 4.13 est qu'il permet de réduire considérablement les calculs. En effet, pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre (ou génératrice dans E) et qu'elle a le bon nombre d'éléments (à savoir : n). Inversement, on voit que toute famille de E ayant $p > n$ éléments est nécessairement liée. A titre d'exemple, le théorème 4.13 permet de montrer le :

Théorème 4.15 *Toute famille échelonnée de polynômes $(P_0, ..., P_n)$, c'est-à-dire telle que* $\deg(P_i) = i$ *pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.*

Théorème 4.16 *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est aussi de dimension finie. De plus, on a* $\dim(F) \leq \dim(E)$ *avec égalité si et seulement si $F = E$.*

Ce résultat est particulièrement pratique pour prouver que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux. En effet, il suffit pour cela de montrer que $F \subset E$, puis de vérifier que $\dim E = \dim F$.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 5.1 *Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_k)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E. Le rang de la famille $\mathcal{F}$, noté* $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ *ou* $\mathrm{rg}(e_1, ..., e_k)$, *est la dimension de* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$.

Par définition, on voit que $0 \leq \mathrm{rg}(e_1, ..., e_k) \leq \dim E$, et que $\mathrm{rg}(e_1, ..., e_k) \leq k$.

Théorème 5.2 *Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors $\mathcal{F}$ est génératrice dans E si et seulement si son rang est égal à n.*

Ce résultat nous fournit un moyen très commode pour vérifier qu'une famille est génératrice dans E, d'autant plus que le rang d'une famille peut se calculer à l'aide d'une méthode du type "pivot de Gauss". Plus précisément, soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E. On commence par donner les vecteurs colonnes $C_1, ..., C_k$ des coordonnées des vecteurs $e_1, ..., e_k$ dans la base $\mathcal{B}$, que l'on dispose ensuite l'un après l'autre, ce qui nous donne un tableau de la forme :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_k) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,k} \end{pmatrix}.$$

C'est ce que l'on appelle *la matrice des coordonnées des vecteurs* $e_1, ..., e_k$ *dans la base* $\mathcal{B}$. Ensuite, on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de cette matrice, comme lorsque l'on résout un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Enfin, une fois cette réduction faite, on supprime les éventuelles colonnes de zéros qui sont apparues. Comme le rang d'une famille de vecteurs ne change pas par des opérations élémentaires, ni lorsque l'on en retire le vecteur nul, on obtient que le rang de $(e_1, ..., e_k)$ est égal à celui d'une matrice de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_{i_1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{i_2,2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & b_{i_l,l} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & \cdots & b_{n,l} \end{pmatrix},$$

où aucune des colonnes n'est la colonne nulle. En particulier, on trouve que :

$$\mathrm{rg}(e_1, ..., e_k) = l.$$

De plus, comme le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ ne change pas si l'on effectue des opérations élémentaires sur les vecteurs $e_1, ..., e_k$, on obtient en plus que *les vecteurs colonnes non nuls restants après réduction complète sont les matrices colonnes des coordonnées d'une base de* $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. En d'autres termes, ce procédé permet non seulement de calculer le rang de $(e_1, ..., e_k)$, mais aussi de déterminer une base de $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$! On montre aussi que le rang d'une famille de vecteurs ne change pas non plus *par des opérations élémentaires sur les lignes*. Cependant, ce type d'opérations élémentaires permettent juste de calculer le rang de cette famille, mais ne donnent pas au final une base de l'espace vectoriel engendré par cette famille, au contraire des opérations élémentaires sur les colonnes ! C'est pourquoi on effectuera de préférence des opérations élémentaires sur les colonnes. A noter enfin qu'une des conséquences des théorèmes 4.13 et 5.2 est donné par le :

Corollaire 5.3 *Soit* $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* E *de dimension* n. *Alors* $\mathcal{F}$ *est une base de* E *si et seulement si son rang est égal à* n.

6 Sommes de sous-espaces vectoriels

6.1 Sommes de deux sous-espaces vectoriels

Définition 6.1 *Soient* F *et* G *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *La somme de* F *et* G, *notée* $F + G$, *est l'ensemble des vecteurs de la forme* $w = u + v$, *où* $u \in F$ *et* $v \in G$, *c'est-à-dire :*

$$F + G = \{w \in E | \exists (u, v) \in F \times G, \ w = u + v\}.$$

Théorème 6.2 *La somme de deux sous-espaces vectoriels de* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

A noter que, si F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) qui contient à la fois F et G.

Théorème 6.3 *Soient* $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_k)$ *et* $\mathcal{G} = (g_1, ..., g_l)$ *deux familles d'un espace vectoriel* E. *Alors :*

$$\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_l) = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k) + \mathrm{Vect}(g_1, ..., g_l).$$

En particulier, pour obtenir une famille génératrice d'une somme d'espaces vectoriels, il suffit de déterminer des familles génératrices de chacun d'entre eux, puis d'effectuer la "réunion de ces familles".

Définition 6.4 *Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $F+G$ est directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, cette somme est notée $F \oplus G$.*

Définition 6.5 *Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E, ou que E est somme directe de F et G, si $E = F \oplus G$.*

Théorème 6.6 *Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors E est somme directe de F et G si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.*

En d'autres termes, on voit que $E = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. A noter que, si $E = F + G$ mais que cette somme n'est pas directe, alors cette décomposition est loin d'être unique. Dans ce cas, tout vecteur de E peut se décomposer d'une infinité de façons comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème 6.7 (Formule de Grassmann) *Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, cette formule est très utile pour calculer la dimension de certains espaces vectoriels sans rechercher de bases. A noter que les résultats suivants (qui sont tous deux des conséquences de la formule de Grassmann) fournissent des moyens très pratiques pour vérifier qu'un espace vectoriel est somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Théorème 6.8 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\} \ \text{ et } \ \dim E = \dim F + \dim G.$$

Théorème 6.9 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par juxtaposition de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est une base de E si et seulement si F et G sont supplémentaires dans E.*

Dans ces conditions, on dit que la base $\mathcal{B}$ est obtenue par *concaténation* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ou encore que la base $\mathcal{B}$ est *adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.*

Théorème 6.10 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G dans E, et de plus :* $\dim G = \dim E - \dim F$.

A noter qu'en fait, il existe une infinité de supplémentaires de F dans E. Dans la pratique, pour en trouver un, il suffit de compléter une base $\mathcal{L}$ de F (qui est une famille libre de E) en une base de E. Pour ce faire, on se fixe une base $\mathcal{B}$ de E, et on commence par vérifier si la famille obtenue en rajoutant le premier vecteur de $\mathcal{B}$ à la famille $\mathcal{L}$ est libre ou non. Si c'est le cas, alors on rajoute ce premier vecteur à $\mathcal{L}$ et sinon, on l'exclut. En répétant ce processus pour tous les vecteurs de $\mathcal{B}$, on a ainsi complété la famille $\mathcal{L}$ en une base de E. Dans ce cas, on vérifie facilement à l'aide du théorème 6.9 que la famille de vecteurs que l'on a rajoutés à $\mathcal{L}$ forme une base d'un supplémentaire de F dans E.

Définition 6.11 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $(n-1)$.*

En particulier, toute droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine) est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$. De même, tout plan vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine) est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. A noter qu'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie est complètement caractérisé par le fait d'avoir un supplémentaire de dimension 1. On en verra d'autres caractérisations dans le chapitre suivant, notamment en termes de formes linéaires.

6.2 Somme de r sous-espaces vectoriels

Dans ce sous-paragraphe, r désigne un entier naturel ≥ 2.

Définition 6.12 *Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de $F_1, ...,$ F_r, notée indifféremment $F_1 + ... + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$, est l'ensemble des vecteurs de la forme $u = u_1 + ... + u_r$, où $u_i \in F_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, c'est-à-dire :*

$$F_1 + ... + F_r = \{u \in E | \ \exists (u_1, ..., u_r) \in F_1 \times ... \times F_r, \ u = u_1 + ... + u_r\}.$$

Théorème 6.13 *La somme de r sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

On peut même être plus précis et dire que $F_1 + ... + F_r$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient tous les sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$.

Définition 6.14 *Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $F = F_1 + ... + F_r$ est directe si, pour tout vecteur $u \in F$, il existe un unique r-uplet $(u_1, ..., u_r) \in F_1 \times ... \times F_r$ tel que $u = u_1 + ... + u_r$. Dans ce cas, la somme $F_1 + ... + F_r$ est notée $F_1 \oplus ... \oplus F_r$ ou $\oplus_{i=1}^{r} F_i$.*

Définition 6.15 *Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que E est somme directe de $F_1, ..., F_r$ si $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$.*

En particulier, on voit que E est somme directe de $F_1, ..., F_r$ si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1, d'un vecteur de F_2,..., d'un vecteur de F_r. A noter que, si $E = F_1 + ... + F_r$ mais que cette somme n'est pas directe, alors tout vecteur de E se décompose comme somme de vecteurs des F_i, mais cette décomposition est loin d'être unique. Le résultat suivant fournit un critère pour vérifier qu'une somme de sous-espaces vectoriels est directe.

Théorème 6.16 *Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de bases respectives $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_r$, et posons $F = F_1 + ... + F_r$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La somme $F = F_1 + ... + F_r$ est directe, i.e. $F = \oplus_{i=1}^{r} F_i$.*
2. *Pour tout r-uplet $(u_1, ..., u_r) \in F_1 \times ... \times F_r$, on a : $u_1 + ... + u_r = 0_E \Longrightarrow u_1 = ... = u_r = 0_E$.*
3. *La famille $\mathcal{B}$ obtenue par juxtaposition de $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_r$ est une base de F.*
4. $\dim F = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i = \dim F_1 + ... + \dim F_r$.

Dans ces conditions, on dit que la base $\mathcal{B}$ est obtenue par *concaténation* de $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_r$, ou encore qu'elle est *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$. En particulier, on en déduit le :

Corollaire 6.17 *Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors on a l'égalité $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$ si et seulement si* (1) *$E = F_1 + ... + F_r$ et* (2) *la somme $F_1 + ... + F_r$ est directe.*

A noter que, pour montrer que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$, l'une des méthodes les plus pratiques consiste à utiliser l'assertion (3) du théorème 6.16. Plus précisément, on cherchera à déterminer explicitement une base $\mathcal{B}_i$ de F_i pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, puis on vérifiera que la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_r$ est bien une base de E.