TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n boules numérotées de 1 à n. On place au hasard les n boules dans n boîtes, chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules. Quelle est la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule?

Exercice 2. Une urne contient p boules blanches et q boules noires, avec $p, q \geq 3$. On tire alors 3 boules de cette urne successivement et sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une boule blanche, puis une boule noire, et enfin une boule blanche?

Exercice 3. On dispose de deux urnes U_1 et U_2, ainsi que d'une pièce équilibrée. On suppose que l'urne U_1 contient 1 boule blanche et 2 boules noires, que l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires. On lance alors la pièce. Si le résultat est pile, alors on tire une boule de l'urne U_1, sinon on en tire une de l'urne U_2.

(1) Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche?
(2) On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu face?

Exercice 4. Une personne doit ouvrir une porte. Elle dispose pour cela d'un trousseau de 15 clés contenant la clé qui ouvre cette porte. Elle essaie les clés au hasard et l'une après l'autre. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ème essai ($k \in \{1, ..., 15\}$)?

Exercice 5. On répartit au hasard 4 boules distinctes dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3.

(1) Quelle est la probabilité que la première boîte soit vide?
(2) Quelle est la probabilité que la première boîte ou la deuxième boîte soit vide?

Exercice 6. Soit $(a, b) \in]0, 1[^2$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de fonctionner à la date n,
- si l'appareil est en panne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement "l'appareil fonctionne à la date n" et p_n la probabilité de M_n. Enfin, on suppose que l'appareil fonctionne à la date 0.

(1) Etablir une relation entre p_n et p_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n, a, b.
(3) Quelle est la probabilité que l'appareil ne tombe jamais en panne?

Exercice 7. On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au n-ème lancer et sur les $(n - 1)$ premiers lancers, ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".

(1) Calculer la probabilité $P(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme de 5.
(3) Trouver la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme de 7.
(4) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais?

Exercice 8. On lance n dés. Quelle est la probabilité de l'événement A_n : " le total des numéros est pair"?

Exercice 9. Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires. Deux joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule sans la remettre dans l'urne, jusqu'à ce qu'une boule rouge sorte. C'est le joueur A qui commence le jeu. Trouver la probabilité que A tire une boule rouge le premier.

Exercice 10. (Inégalité de Boole) Montrer que, pour tous événements $A_1, ..., A_n$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exercice 11. On dispose de 10 pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la k-ème pièce amène "pile" avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la 5-ème pièce?

Exercice 12. On lance une pièce équilibrée.

(1) On suppose que l'on lance la pièce n fois, avec $n \geq 2$. Calculer les probabilités des événements A_n : "on obtient au plus une fois pile" et B_n : "les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques". Les événements A_n et B_n sont-ils indépendants? Justifier.

(2) Cette fois-ci, on lance indéfiniment la pièce. Calculer les probabilités des événements A : "on obtient au plus une fois pile" et B : "les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques". Les événements A et B sont-ils indépendants? Justifier.

Exercice 13. On considère une infinité d'urnes. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, l'urne $n^o k$ contient 2^k boules dont une seule blanche et les autres noires, et que la probabilité de choisir la k-ème urne est égale à $\frac{1}{2^k}$. On choisit au hasard une urne, puis on en tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

Exercice 14. Un enfant lance des galets pour faire des ricochets dans l'eau. On suppose que, si le galet a effectué $(n-1)$ premiers ricochets, alors il ricoche pour la n-ème fois avec probabilité $\frac{1}{n}$ (sinon il coule).

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité p_n que le galet coule après n ricochets.

(2) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interprétation?

Exercice 15. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est égale à $p_n = \alpha p^n$, et que les distributions de sexes sont équiprobables dans une fratrie.

(1) Etablir l'inégalité : $1 + \alpha \leq \frac{1}{p}$.

(2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement N filles.

Exercice 16. (Lemme de Borel-Cantelli - ESCP 2012)

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $1 - x \leq e^{-x}$.

(2) On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment...

 (a) Montrer que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et toute famille d'événements indépendants $(E_1, ..., E_l)$, on a :

$$P\left(\bigcap_{1\leq i\leq l} \overline{E_i}\right) \leq e^{-\sum\limits_{i=1}^{l} P(E_i)}.$$

 (b) Déterminer la probabilité de l'événement A_k :"la boule numérotée 10 sort lors du k-ème tirage".

 (c) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du n-ème tirage?

 (d) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte une infinité de fois?

 (e) Calculer la probabilité que la boule 10 sorte une infinité de fois de suite.

(3) On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le n-ème jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième jour, cinq boules le troisième, etc). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.

 (a) Montrer que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et toute famille d'événements $(E_1, ..., E_l)$, on a :

$$P\left(\bigcup_{1\leq i\leq l} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{l} P(E_i).$$

 (b) Quelle est la probabilité que le numéro 10 sorte une infinité de fois?

Exercice 17. (HEC 2013) On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante, et on s'intéresse à l'événement E_n : "au cours des n lancers, deux pile successifs n'apparaissent pas". Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n la probabilité de l'événement E_n.

(1) Trouver une relation entre p_n, p_{n+1}, p_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que la suite (p_n) tend vers 0.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 18. Une urne U contient 5 boules blanches et 2 noires. Une deuxième urne V contient 6 boules blanches et 3 noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On choisit au hasard, successivement et avec remise, 2 boules dans chacune des urnes et on en note les couleurs.

(1) Quelle est la probabilité que les 4 boules choisies soient de la même couleur?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules noires?

Exercice 19. On dispose de 5 pièces de monnaie dont l'une possède 2 faces. On choisit une des pièces au hasard et on la lance n fois.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir face au premier lancer?
(2) On a obtenu face au premier lancer. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée?
(3) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces aux n lancers?
(4) On a obtenu n faces aux n lancers. Quelle est la probabilité p_n d'avoir choisi la pièce truquée?
(5) Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 20. Dans une population, un sujet sur 100 est atteint par une maladie. Il existe un test de dépistage de cette maladie dont la fiabilité n'est pas totale : 90 pour cent des sujets atteints sont testés positivement, et 95 pour cent des sujets sains sont testés négativement. Calculer la probabilité qu'un sujet dont le test est négatif soit atteint par la maladie.

Exercice 21. On cherche un document dont on pense qu'il est dans un classeur à 5 tiroirs avec la probabilité p. On a cherché dans les 4 premiers tiroirs mais on ne l'a pas trouvé. Probabilité qu'il se trouve dans le dernier?

Exercice 22. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère n personnes qui lancent chacune une pièce de monnaie. Si une seule personne obtient pile (resp. face) alors que les autres obtiennent face (resp. pile), elle est déclarée perdante et va chercher des rafraîchissements.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir un perdant lors de cette expérience?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier perdant à la i-ème expérience?

Exercice 23. Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC. Si, à l'étape n, il est sur un sommet, alors à l'étape suivante $n + 1$, il peut soit rester sur le même sommet avec la probabilité $2/3$, soit se placer sur l'un des 2 autres sommets avec la même probabilité. On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) l'événement "Le mobile se trouve en A (resp. B et C) à l'étape n", et par a_n (resp. b_n et c_n) sa probabilité.

(1) Quelle relation simple lie les nombres a_n, b_n, c_n?
(2) Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
(3) En déduire que les suites $(u_n) = (a_n - b_n)$ et $(v_n) = (a_n - c_n)$ sont géométriques.
(4) On suppose que le mobile se trouve en A à l'étape 0. Calculer a_n, b_n, c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24. On dispose de deux pièces. L'une des pièces est équilibrée, et l'autre, faussée, permet d'obtenir "face" avec une probabilité de $2/3$. Malheureusement, on ne sait plus quelle est la pièce truquée. On dispose alors de deux stratégies :

(1) On lance une pièce. Si le résultat est "face", on continue à jouer avec cette pièce. Sinon, on joue avec l'autre et on ne change plus de pièce. Soit F_n l'événement "on obtient "face" au n-ème lancer" et soit E l'événement "on joue avec la pièce équilibrée après le premier lancer".
   (a) Quelle est la probabilité de jouer avec la pièce équilibrée après le premier lancer?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au n-ème lancer?
   (c) Calculer la limite de $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
(2) On lance une pièce. Si le résultat est "face", on rejoue avec la même pièce. Si le résultat est "pile", on change de pièce. Mais désormais, on procède ainsi à chaque tirage. Soit F_n l'événement "on obtient "face" au n-ème lancer" et soit T_n l'événement "on joue avec la pièce truquée au n-ème lancer".
   (a) Calculer $P(T_{n+1})$ en fonction de $P(T_n)$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire l'expression de $P(T_n)$ en fonction de n.
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au n-ème lancer?
   (d) Calculer la limite de $P(F_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
(3) Quelle est la meilleure stratégie à long terme pour avoir le plus de chances d'obtenir "face"?

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance indéfiniment une pièce truquée, dont la probabilité de faire face à chaque lancer est égale à p (où $p \in]0,1[$). On note alors P pour pile et F pour face.

(1) Calculer la probabilité de A_n : "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $n-1$ et n".
(2) Calculer la probabilité de A : "la séquence PF apparait au moins une fois".
(3) Calculer la probabilité de B : "la séquence PP apparait sans qu'il y ait eu de séquence PF avant".

Exercice 26. Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à celle des boules restantes (*indication : utiliser la symétrie du problème*)

Exercice 27. (HEC 2009) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soit $p \in]0,1[$. Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut en manger un, il choisit de manière indépendante avec la probabilité p sa poche de gauche.

(1) On suppose qu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie. Quelle est la probabilité qu'il en reste k dans l'autre poche?
(2) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait plus de bonbon dans les deux poches simultanément?
(3) Calculer $\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Exercice 28. (ESCP 2014) On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par R_n l'événement "pile apparaît au n-ème lancer" et par S_n l'événement "face apparaît au n-ème lancer". On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par la suite, on pose pour tout $n \geq 3$:

$$B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i.$$

Enfin, on pose $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$: $u_n = P(U_n)$.

(1) Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
(2) (a) Calculer $P(B_n)$ pour tout $n \geq 3$.
  (b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, les événements B_n, B_{n+1}, B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
  (c) Calculer les valeurs de u_3, u_4, u_5.
(3) Dans cette question, on suppose que $n \geq 5$.
  (a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et donner leurs probabilités respectives.
  (b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
  (c) Déterminer la limite l de la suite (u_n).
(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
  (a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.
  (b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ (*indication : sommer la relation de la question* (4)(*a*)).

Exercice 29. (ESCP 2021) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante de limite 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_n$.

(1) Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes de limite S et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|S - S_n| \leq u_{n+1}$. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$. Quelle est sa somme?
(3) Les membres d'un groupe de n personnes (avec $n \geq 2$) veulent se faire des cadeaux mutuels. Pour cela, chacun achète un cadeau et le met dans un paquet, les paquets étant indiscernables. Les cadeaux sont mis dans un pot commun, puis chacune des n personnes choisit au hasard un cadeau dans le pot commun. On note a_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans que personne ne reçoive son propre cadeau.
  (a) Calculer a_2 et a_3.
  (b) On admet que : $\forall n \geq 4$, $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.
    (i) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
    (ii) Calculer la probabilité p_n qu'une répartition aléatoire des n cadeaux donne une répartition où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne.
    (iii) A quelle condition sur n peut-on dire que $\frac{1}{e}$ est une approximation de p_n à 10^{-3} près?