RÉSUMÉ DE COURS : ESPÉRANCE ET CONDITIONNEMENT

1 Séries indexées sur un ensemble dénombrable

Dans cette partie, nous allons généraliser la notion de série indexée sur l'ensemble des entiers naturels, et définir ce que l'on entend par la "somme" d'un tel objet. Pour ce faire, on commence par la :

Définition 1.1. *Soit I un ensemble. On dit que I est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. De plus, on dit que I est au plus dénombrable s'il est soit fini, soit dénombrable.*

Grosso modo, un ensemble I est dénombrable si l'on peut énumérer (ou numéroter) ses éléments sous la forme d'une suite infinie. En particulier, on voit que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dénombrable. De plus, on montre (et nous admettrons) les assertions suivantes :

— *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

— *Plus généralement, toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

— *Toute réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

— *Tout produit cartésien $I \times J$ d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

En particulier, on voit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables.

Définition 1.2. *Soit I un ensemble. Une famille réelle $(u_i)_{i\in I}$ est une application u de I dans $\mathbb{R}$. On dit que cette famille est (au plus) dénombrable si l'ensemble I est (au plus) dénombrable.*

Si I est dénombrable, on parle aussi de suite $(u_i)_{i\in I}$ indexée sur I.

Théorème - définition 1.3. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille réelle dénombrable. S'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors l'absolue convergence de cette série et sa somme ne dépendent pas de la bijection (ou indexation) φ choisie. Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{i\in I} u_i$ converge absolument, et la somme de cette série est définie par :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Dans le langage mathématique, on dit aussi que *la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.* A noter que, si φ et φ' sont deux bijections de $\mathbb{N}$ dans I, alors l'application $\sigma = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et de plus, on a $u_{\varphi'(n)} = u_{\varphi(\sigma(n))}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, d'après le cours sur les séries numériques, on voit que la série $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi'(n)}$ converge absolument si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge absolument et dans ce cas, leurs sommes sont égales (ce qui permet au passage de retrouver le résultat annoncé ci-dessus). En d'autres termes, *la sommabilité d'une famille réelle dénombrable $(u_i)_{i\in I}$ et sa somme (si elle existe) ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on additionne les termes u_i.*

A présent, nous allons donner quelques résultats concernant la convergence absolue des séries indexées sur un ensemble dénombrable (lesquels sont tous admis).

Théorème 1.4. (Critère de comparaison) *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles réelles indexées sur un ensemble dénombrable I, telles que : $\forall i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Si la série $\sum_{i\in I} v_i$ converge absolument, alors la série $\sum_{i\in I} u_i$ converge absolument et dans ce cas, on a :*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

A noter que, si les familles en question sont à termes positifs, on parlera plutôt de convergence que de convergence absolue. A noter aussi que le résultat ci-dessus est extrêmement utile pour établir la nature d'une série indexée sur un ensemble dénombrable. Dans la pratique, pour montrer qu'une série

$\sum_{i\in I} u_i$ (indexée sur un ensemble dénombrable I) converge absolument, on cherchera comme pour les séries numériques (indexées sur $\mathbb{N}$) à majorer la valeur absolue de son terme général $|u_i|$ par le terme général v_i (bien souvent plus simple) d'une série $\sum_{i\in I} v_i$ que l'on sait être absolument convergente.

Théorème 1.5. (Sommation par paquets) *Soit I un ensemble dénombrable, soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille dénombrable de parties deux à deux disjointes de I telle que $I = \cup_{j\in J} I_j$ et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille réelle dénombrable. Alors la série $\sum_{i\in I} u_i$ converge absolument si et seulement si :*

1. *pour tout $j \in J$, la série $\sum_{i\in I_j} |u_i|$ converge, de somme s_j,*
2. *la série $\sum_{j\in J} s_j$ converge.*

Dans ce cas, on a la relation suivante :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right).$$

A noter que ce résultat est particulièrement utile pour calculer la somme d'une série absolument convergente. En effet, dans certains cas, on peut être amené à regrouper judicieusement les termes d'une telle série pour pouvoir en calculer la somme plus facilement. Dans la plupart des cas, le regroupement par paquets est imposé.

Théorème 1.6. (Linéarité) *Soit I un ensemble dénombrable, soient $\sum_{i\in I} u_i$ et $\sum_{i\in I} v_i$ deux séries absolument convergentes et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i)$ converge absolument et :*

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \left(\sum_{i\in I} u_i \right) + \mu \left(\sum_{i\in I} v_i \right).$$

A noter que ce résultat généralise la propriété de linéarité bien connue pour les séries indexées sur $\mathbb{N}$.

Théorème 1.7. (Produit) *Soient I et J deux ensembles dénombrables, et soient $\sum_{i\in I} u_i$ et $\sum_{j\in J} v_j$ deux séries absolument convergentes. Alors la série $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$ converge absolument, et de plus :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i \right) \left(\sum_{j\in J} v_j \right).$$

En particulier, ce théorème nous assure que, sous réserve de convergence absolue, on peut développer ou factoriser un produit de deux sommes de termes indexés sur des ensembles dénombrables. A présent, nous allons nous intéresser à un cas particulier de séries, à savoir celles qui sont indexées sur $\mathbb{N}^2$.

Définition 1.8. *On appelle suite réelle double toute famille réelle $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ indexée sur $\mathbb{N}^2$.*

Comme conséquence du théorème de sommation par paquets, on a le :

Théorème 1.9. (Fubini) *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite réelle double. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la série $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}$ converge absolument,*
2. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_j u_{i,j}$ est absolument convergente, et la série $\sum_i (\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|)$ converge,*
3. *pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_i u_{i,j}$ est absolument convergente, et la série $\sum_j (\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|)$ converge.*

Dans ce cas, on a la relation suivante :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

A noter que, dans le cas d'une série double à termes positifs, on parle plutôt de convergence que de convergence absolue. A noter aussi que, sous les hypothèses du théorème de Fubini, on peut intervertir les symboles $\sum_i$ et $\sum_j$ lors de la sommation. En d'autres termes, si une série double est absolument convergente, alors on peut sommer les termes de cette série double dans l'ordre que l'on veut.

2 Espérance et conditionnement

Définition 2.1. *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$. La loi de X conditionnellement à A (ou loi de X sachant A) est l'application :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P_A([X = x]) \end{array} \right. .$$

Partant du fait que la probabilité sachant A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on peut naturellement définir la notion d'espérance d'une variable aléatoire discrète pour cette probabilité. Plus précisément :

Définition 2.2. *Soit X une variable aléatoire discrète finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$, et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$. Alors l'espérance conditionnelle relative à A (ou espérance de X sachant A) est le réel :*

$$E(X|A) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_A([X = x_i]).$$

Définition 2.3. *Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$, et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$. Alors on dit que X admet une espérance conditionnelle relative à A (ou que X admet une espérance sachant A) si la série $\sum_{i \in I} x_i P_A([X = x_i])$ converge absolument. Dans ce cas, l'espérance de X sachant A est définie comme la somme de cette série, c'est-à-dire :*

$$E(X|A) = \sum_{i \in I} x_i P_A([X = x_i]).$$

Plus généralement, on retiendra que, *si $P(A) \neq 0$, alors la variable aléatoire discrète X admet une espérance sachant A si et seulement si X admet une espérance pour la probabilité P_A. Dans ce cas, l'espérance de X sachant A est l'espérance de X pour la probabilité P_A, c'est-à-dire :*

$$\boxed{E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A([X = x]).}$$

A noter qu'une variable aléatoire finie admet toujours une espérance conditionnelle relative à A (pourvu que $P(A) \neq 0$), ce qui n'est pas toujours le cas pour une variable aléatoire discrète infinie !

Théorème 2.4. (Formule de l'espérance totale) *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors X admet une espérance si et seulement si :*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espérance conditionnelle $E(X|A_n)$ existe,*
2. *la série $\sum_{n \geq 0} E(|X||A_n)P(A_n)$ converge.*

Dans ce cas, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(X|A_n)P(A_n).$$

La formule de l'espérance totale permet notamment de calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dont la loi est assez compliquée, mais dont les lois conditionnelles relatives aux éléments d'un système complet d'événements sont plus simples. C'est ce qui arrive par exemple, si les lois conditionnelles en question sont des lois usuelles, comme la loi binomiale. Dans ce cas, on calcule chacune des espérances conditionnelles, puis on applique la formule ci-dessus. *A noter enfin que, si le système complet d'événements est fini, alors la formule de l'espérance totale est toujours valable. Plus précisément, si $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements fini tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in I$, alors la variable aléatoire discrète X admet une espérance si et seulement si $E(X|A_n)$ existe pour tout $n \in I$ et dans ce cas, on a :*

$$E(X) = \sum_{n \in I} E(X|A_n)P(A_n).$$

Au passage, on constate que l'on n'a plus besoin de vérifier la deuxième condition du théorème 2.4, vu que celle-ci est automatiquement satisfaite (étant donné qu'on travaille avec une somme finie, qui ne pose aucun problème de convergence).