TRAVAUX DIRIGÉS : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES - VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

Exercice 1. Soient X, Y deux variables de Bernoulli de paramètres p et p'. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle (*indication : vérifier que X et Y sont indépendantes si et seulement si $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont indépendants*).

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi du couple (U, V) et calculer la covariance de U et V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ respectivement, dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a^i}{j!}.$$

(1) Calculer la valeur de a pour que cela définisse bien une loi conjointe.
(2) Déterminer les lois de X et de Y, puis vérifier que X et Y sont indépendantes.
(3) Calculer l'espérance et la variance de $S = X + Y$.

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{(i + j)\lambda^{i+j}}{e(i!j!)}.$$

(1) Déterminer la valeur de λ pour que cela définisse bien une loi conjointe.
(2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
(3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire 2^{X+Y}.

Exercice 5. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. On désigne par X le numéro de la première boule tirée, et par Y celui de la deuxième.
(1) Déterminer la loi du couple (X, Y), ainsi que ses lois marginales.
(2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
(3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ_n de (X, Y).
(4) Calculer la limite de la suite $(\rho_n)_{n>1}$. Que remarque-t-on?

Exercice 6. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de $S = X + Y$, puis calculer $P([X \neq Y])$ et $P([X = Y])$.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Donner l'espérance de $Z = XY$, puis déterminer la loi de Z ainsi que sa variance.

Exercice 8. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.
(1) Calculer l'espérance et la variance de $X + Y$.
(2) Montrer que, pour tout $k \in \{2, ..., n + 1\}$, on a : $P([X + Y = k]) = \frac{k-1}{n^2}$.
(3) Calculer de même $P([X + Y = k])$ pour tout $k \in \{n + 2, ..., 2n\}$.
(4) En déduire que : $P([X + Y = Z]) = \frac{n-1}{n^2}$.

Exercice 9. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X_1 + X_2$, $V = X_1 - X_2$ et $W = \min\{X_1, X_2\}$.
(1) Déterminer les lois marginales du couple (U, V), ainsi que la loi de W.
(2) Calculer la covariance de (U, V). Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n personnes qui se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on désigne par X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.
(1) Déterminer les lois de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$.
(2) Donner la variance de $X_1 + X_2$, et en déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0,1[$ et posons $q = 1-p$. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue 2 tirs. A chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres. On désigne par X le nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir, par Z le nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs, et l'on pose $Y = Z - X$.

(1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X. Même question pour Z.
(2) Que représente Y? Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Justifier.
(4) A l'aide des variances de X, Y, Z, montrer que : $\text{cov}(X,Y) = -np^2q$.

Exercice 12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et soit $p \in]0,1[$. Dans un bureau de poste, on suppose que le nombre N de personnes qui se présentent suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que tout personne vient avec une probabilité p pour poster un envoi, et avec une probabilité $q = 1-p$ pour effectuer une autre opération. Enfin, on suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération, et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres. On désigne par X le nombre de personnes qui viennent poster une lettre, et par Y le nombre de celles qui viennent pour une autre opération.

(1) Déterminer la loi de X sachant $[N = j]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
(2) Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).
(3) En déduire la loi, l'espérance et la variance de X.
(4) Montrer que X et Y sont indépendantes.
(5) En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer la covariance de (X, N).
(6) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de (X, N).
(7) La variable aléatoire N peut-elle être une fonction affine de Y?

Exercice 13. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tous entiers $k, n \geq 1$, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $V_n = Y_1 + ... + Y_n$.

(1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n pour tout $n \geq 1$.
(2) Donner l'espérance et la variance de S_n, puis calculer l'espérance de V_n.
(3) Calculer $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1})$, puis $\text{cov}(Y_i, Y_j)$ pour tous i, j tels que $i < j - 1$.
(4) En déduire l'expression de la variance de V_n en fonction de n.

Exercice 14. (ESCP 2011) Soit $N, X_1, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que N est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que les X_i suivent toutes la même loi qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant un moment d'ordre 2. On pose $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

(1) Déterminer l'espérance de Y en fonction de $E(X)$ et $E(N)$.
(2) A l'aide de la formule de l'espérance totale, déterminer $E(Y^2)$ en fonction de $E(X), V(X), E(N), E(N^2)$.
(3) En déduire la variance de Y en fonction de $E(X), V(X), E(N), V(N)$.
(4) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On dispose d'une pièce de monnaie qui donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Un joueur tire un jeton de l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué sur le jeton. Calculer l'espérance et la variance du nombre de piles obtenus.

Exercice 15. (ESCP 2014) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, suivant la même loi définie par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$P([X = k]) = P([Y = k]) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$

(1) Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité.
(2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$, puis trouver les espérances de $S = \frac{1}{1+Z}$ et $R = \frac{X}{1+Z}$.
(3) On considère maintenant la variable aléatoire $T = \inf(X, Y)$.
 (a) Déterminer $P([X \leq n])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Prouver que la loi de T est définie par : $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $P([T = m]) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}(\frac{a}{1+a})^{2m}$.

Exercice 16. (HEC 2014) Soit $p \in]0,1[$ et soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

(1) Pour tout $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$, déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[X_1 + X_2 = n]$.
(2) Calculer l'espérance de X_1 sachant $[X_1 + X_2 = n]$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 17. On dispose de n urnes $U_1, ..., U_n$. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule de cette urne. On désigne par X le numéro de l'urne choisie, et par Y le numéro de la boule choisie.

(1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
(2) Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
(3) Exprimer la loi de Y à l'aide d'une somme.
(4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Justifier.
(5) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de n.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, on pose : $p_{i,j} = \lambda ij$.

(1) Déterminer λ pour que les $p_{i,j}$ définissent la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires.
(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant cette loi conjointe.
   (a) Déterminer les lois marginales de (X, Y), puis calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Que vaut la covariance de (X, Y)?
(3) Reprendre les questions (1) et (2) en utilisant cette fois-ci la famille $(p_{i,j})_{i,j\geq 0}$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad p_{i,j} = \lambda \frac{(i + j)}{i!j!2^{i+j}}.$$

Exercice 19. Soit n un entier ≥ 3. On considère un sac contenant $(n - 2)$ boules noires et 2 boules blanches. On vide l'urne en tirant les boules une à une sans remise. On désigne par X le rang de la première boule blanche tirée, et par Y celui de la deuxième.

(1) Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si} \quad i < j \\ 0 & \text{si} \quad i \geq j \end{cases}.$$

(2) En déduire les lois de X et de Y.
(3) Calculer les espérances de X, Y, X^2, XY, Y^2.
(4) En déduire le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y).

Exercice 20. (Fonction génératrice) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, ..., n\}$. On désigne par G_X la fonction génératrice de X, c'est-à-dire l'application définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k])t^k.$$

(1) Calculer $G_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
(2) Comparer $G_X(t)$ et $E(t^X)$. Que représente $G'_X(1)$? Justifier.
(3) Calculer la variance de X à l'aide de $G'_X(t)$ et $G''_X(t)$.
(4) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, ..., n_1\}$ et $\{0, ..., n_2\}$, où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question (2), montrer que, si $Y = X_1 + X_2$, alors $G_Y = G_{X_1} \times G_{X_2}$.

Exercice 21. (ESCP 2009) Soit $p \in]0, 1[$. Une personne envoie des courriers électroniques via deux serveurs A et B. L'expérience montre que le serveur A est choisi avec la probabilité p, et le serveur B le reste du temps, les choix étant successifs et supposés indépendants. Chaque envoi est représenté par une série de lettres. Par exemple, la série $ABBBAB$... signifie que le premier message a transité par A, puis les trois suivants par B, puis le suivant par A, etc. On dit alors que la première série est de longueur 1, la deuxième de longueur 3, la troisième de longueur 1, etc. On désigne par L_1 la longueur de la première série, par L_2 celle de la deuxième série et par L_3 celle de la troisième série.

(1) Déterminer la loi de L_1.
(2) Montrer que L_1 admet une espérance et une variance, puis calculer $E(L_1)$.
(3) Donner la loi du couple (L_1, L_2).
(4) En déduire la loi de L_2.
(5) Calculer l'espérance de L_2.
(6) Déterminer la loi de L_3.
(7) Justifier l'existence de la covariance de (L_1, L_2).
(8) Calculer cette covariance et préciser son signe.

Exercice 22. (HEC 2009) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$ et $V = X_1 - X_2$.

(1) Déterminer la loi de U.
(2) Déterminer la loi de X_1 sachant $[U = n]$ pour tout entier $n \geq 2$.
(3) Calculer $E(X_1 | [U = n])$ pour tout entier $n \geq 2$, et en déduire $E(X_1)$.
(4) Déterminer la loi de V.
(5) Calculer la covariance de (U, V).
(6) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 23. (ESCP 2011) Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la variable aléatoire S par $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on désigne par F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout $g \in F$ tel que les espérances existent, on a : $E(Ng(N)) = \lambda E(g(N+1))$.
 (b) Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+N}$.
(2) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour tout $g \in F$ tel que les espérances existent, la relation $E(Tg(T)) = \lambda E(g(T+1))$. La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson? Justifier.
(3) Montrer que, pour tout $g \in F$ tel que les espérances existent, on a : $E(Sg(S)) = \lambda E(X_0 g(S + X_0))$.

Exercice 24. (ESCP 2016) Soient λ, p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$. on pose $q = 1-p$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ par :

$$P([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
(2) Déterminer les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
(3) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
(4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.
(5) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 25. (ESCP 2017) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2} dt$ converge et que $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
(2) (a) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2} dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}|s|$.
 (b) En déduire la valeur de u_2 (*indication : montrer que* $\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))$).
(3) A partir de maintenant, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P([X_k = -1]) = P([X_k = 1]) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.
 (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
 (b) Calculer $E(\sin(X_1 t))$ et $E(\cos(X_1 t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 (c) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\cos(S_n t)) = (\cos(t))^n$.
 (d) A l'aide du théorème de transfert et de la question (2)(*a*), montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.

Exercice 26. (HEC 2017) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0,1[$ tels que X_n suit la loi géométrique de paramètre p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = 1 - p_n$ et $Z_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

(1) Calculer $P([Z_n \geq k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de Z_n.
(2) On suppose que $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} P([Z_n = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.