## TRAVAUX DIRIGÉS : PRODUIT SCALAIRE - ESPACES EUCLIDIENS

### 1. Formes bilinéaires et produits scalaires

**Exercice 1.** Déterminer si $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$ et si oui, déterminer si elle est symétrique, définie, positive, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
(2) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.
(3) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.
(4) $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_3y_3$.
(5) $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$.
(6) $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$.

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$, et soit $\varphi$ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E \times E$ par : $\varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(t)Q''(t)dt$.

(1) Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(2) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
(3) Expliciter la norme euclidienne associée.

**Exercice 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)^2 \leq \dfrac{n^2(n+1)}{2}$ (*indication : utiliser Cauchy-Schwarz).*

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les vecteurs $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1^2 + ... + x_n^2 = x_1 + ... + x_n = n$.

**Exercice 5.** Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on a : $\left|\int_0^1 \dfrac{f(t)}{1+t^2}dt\right| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\int_0^1 \dfrac{f^2(t)}{1+t^2}dt}$. Cas d'égalité?

**Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_0, ..., a_n$ des réels quelconques et posons $E = \mathbb{R}_n[x]$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 7. (HEC 2010)** Soit $n$ un entier $\geq 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ et ${}^tAA$ ont même rang (*indication : comparer les noyaux des endomorphismes $f$ et $g$ canoniquement associés à $A$ et ${}^tAA$*).

**Exercice 8. (HEC 2021)** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance. Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance, puis établir que $E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$. Etudier le cas d'égalité.

### 2. Orthogonalité

**Exercice 9.** Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose : $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$.

(1) Déterminer un produit scalaire $\varphi$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = \varphi(x, x)$.
(2) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 10.** Soit $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par : $Q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a : $Q(x) \geq 0$.
(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = \sqrt{Q(x)}$. Montrer que $N$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
(3) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à $N$.

**Exercice 11.** On pose $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$.

(1) Vérifier que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$.
(2) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique pour trouver une base orthonormée de $E$.

**Exercice 12.** La famille $((1,1,1),(1,-2,1),(1,0,-1))$ est-elle une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$? Si oui, est-elle orthonormale? Mêmes questions pour la famille $((0,1,1),(0,-1,1),(1,1,0))$.

**Exercice 13. (Polynômes d'interpolation de Lagrange)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soient $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts. On désigne par $\varphi$ l'application de $E^2$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $(P,Q) \in E^2$ par $\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$. Enfin, pour tout $i \in \{0,...,n\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$L_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

(1) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
(2) Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{0,...,n\}^2$, on a : $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et $L_i(x_j) = 0$ sinon.
(3) En déduire que la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base orthonormée de $E$ pour $\varphi$.
(4) Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans cette base.

**Exercice 14. (Polynômes de Tchebychev - ESCP 2016)** Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 : x \longmapsto 1$, $T_1 : x \longmapsto x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant que l'on explicitera.
 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
 (c) En déduire les racines de $T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt$.
 (a) Montrer que, pour tous réels $a, b$, on a : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.
 (b) Calculer $I_{p,q}$ (*indication : on distinguera les cas "$p \neq q$", "$p = q \neq 0$" et "$p = q = 0$"*).
(3) Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, on pose : $\langle P,Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
 (a) Montrer que l'intégrale $\langle P,Q \rangle$ converge pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$.
 (b) Montrer que $\langle \ , \ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
 (c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, ..., T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$. Est-elle orthonormale?
 (d) Calculer $\langle x \longmapsto x^n, T_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*indication : utiliser* (1)(*a*) *et* (3)(*c*)).

## 3. Espaces euclidiens

**Exercice 15.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Montrer que la matrice du produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible.

**Exercice 16.** Soit $E$ un espace euclidien, et soient $F, G$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
(1) Montrer que, si $F \subset G$, alors on a : $G^\perp \subset F^\perp$.
(2) Etablir l'égalité suivante : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
(3) Montrer que, si $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, alors $F^\perp$ et $G^\perp$ le sont aussi.

**Exercice 17.** Déterminer une base de l'orthogonal de $F$ dans $E$, et ce dans chacun des cas suivants :
(1) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \text{Vect}((1,2,0))$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \text{Vect}((1,1,1),(2,1,-1))$.
(3) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 2y + z = 0\}$.
(4) $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$ et $F = \{P \in E |\ P(-1) = 0\}$.
(5) $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ et $F = \text{Vect}(x \longmapsto x, x \longmapsto x^2+1)$.

**Exercice 18.** Soit $E$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \ , \ \rangle$, et soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $E$ telle que : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle)^2$.
(1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthonormée de $E$.
(2) Calculer la norme de $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ pour tout $x \in E$.
(3) En déduire que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de $E$.

**Exercice 19.** Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[x]^2$, on pose : $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.
(1) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.
(2) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$, puis vérifier que $P : x \longmapsto (x-1)^3$ appartient à $\mathbb{R}_2[x]^\perp$.

**Exercice 20. (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que ${}^tA = A$. De même, on désigne par $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Enfin, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

(1) Exprimer $\varphi(A, B)$ à l'aide des coefficients de $A$ et de $B$.
(2) Montrer que l'application $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
(4) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour $\varphi$.

**Exercice 21.** Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n \geq 2$. Soient $e_1, ..., e_n$ des vecteurs unitaires de $E$ tels que $\|e_i - e_j\| = 1$ si $i \neq j$.

(1) Calculer $\langle e_i, e_j\rangle$ pour tous $i, j$.
(2) Montrer que la matrice $A = (\langle e_i, e_j\rangle)$ est inversible.
(3) En déduire que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre.

**Exercice 22. (QSP ESCP 2010)** Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n \geq 2$. Soient $e_1, ..., e_{n+1}$ des vecteurs de $E$ pour lesquels $\langle e_i, e_j\rangle < 0$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n+1\}^2$ tel que $i \neq j$.

(1) Montrer que, si $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, alors $v = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| e_k = 0$ (*indication : comparer* $\|u\|$ *et* $\|v\|$).
(2) Montrer que toute sous-famille de $n$ vecteurs de $(e_1, ..., e_{n+1})$ est une base de $E$.

**Exercice 23. (Polynômes de Laguerre - ESCP 2014)** Soit $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

(1) (a) Montrer que, pour tous $P, Q \in E$, l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge.
    (b) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$, que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$ par la suite.
(2) Pour tout $P \in E$, on pose $\psi(P) : t \longmapsto te^{-t}P'(t)$ et $U(P) : t \longmapsto e^t[\psi(P)]'(t)$.
    (a) Montrer que $U(P)$ appartient à $E$ pour tout $P \in E$, puis que $U$ est un endomorphisme de $E$.
    (b) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a : $\langle U(P), Q\rangle = \langle P, U(Q)\rangle$.
(3) (a) Soit $n \geq 2$. Montrer que la restriction de $U$ à $\mathbb{R}_n[x]$ induit un endomorphisme $U_n$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
    (b) Déterminer les valeurs propres de $U_n$. L'endomorphisme $U_n$ est-il diagonalisable?
(4) Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $f_k : t \longmapsto e^{-t}t^k$ et $P_k : t \longmapsto e^t f_k^{(k)}(t)$.
    (a) Expliciter $P_k(t)$ (*indication : utiliser la formule de Leibniz*).
    (b) Montrer que $P_k$ est un vecteur propre de $U_n$ et déterminer la valeur propre associée.

**Exercice 24. (HEC 2012)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, et soit $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$. Exprimer ${}^tP$ en fonction de $P$, puis établir l'inégalité :

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{i,j}\right| \leq n.$$

## 4. Exercices supplémentaires

**Exercice 25.** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et soit $\varphi$ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(f, g) \in E \times E$ par : $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

(1) Vérifier que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$.
(2) Montrer que, si $f, g \in E$ et si $f, g, fg - 1$ sont positives sur $[0, 1]$, alors : $\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \geq 1$.

**Exercice 26.** Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $E$ et soient $u_1, ..., u_n$ des vecteurs de $E$ tels que : $\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 < 1$.

(1) Montrer que, pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2\right)$$

(*indication : utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz*).
(2) En déduire que la famille $(e_1 + u_1, ..., e_n + u_n)$ est une base de $E$.

**Exercice 27. (Polynômes de Legendre)** Soit $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le $n$-ème polynôme de Legendre par :

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}, \quad \text{où :} \quad U_n : x \longmapsto (x^2-1)^n.$$

(1) (a) Calculer les polynômes $L_0, L_1, L_2$.
  (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (c) En déduire que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

(2) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.

(3) Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $E$.
  (a) Montrer que, si $P(-1) = P(1) = 0$, alors $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$.
  (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $-1$ et $1$ sont racines d'ordre $\geq k$ de $P$, alors $\langle P^{(k)}, Q\rangle = (-1)^k \langle P, Q^{(k)}\rangle$.

(4) (a) A l'aide de la question (3), montrer que, pour tout $m \geq 1$, le polynôme $L_m$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{m-1}[x]$.
  (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.

**Exercice 28. (Suites de carré sommable)** Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. On désigne par $F$ l'ensemble des suites de $l^2(\mathbb{N})$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par $e_i$ la suite dont le terme d'indice $i$ est égal à 1 et dont tous les autres termes sont nuls.

(1) Montrer que, si $(u_n), (v_n) \in l^2(\mathbb{N})$, alors $\sum |u_n v_n|$ converge (*indication : vérifier que* $2|ab| \leq a^2 + b^2$).

(2) En déduire que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (*indication : vérifier que* $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$).

(3) Pour tous $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ appartenant à $l^2(\mathbb{N})$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
  (a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.
  (b) Vérifier que $e_i$ appartient à $F$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et en déduire que $F$ n'est pas de dimension finie.
  (c) Montrer que tout élément de $F$ est combinaison linéaire d'un nombre fini des $e_i$.
  (d) Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de $F$ dans $l^2(\mathbb{N})$, vérifier que $F \oplus F^\perp \neq l^2(\mathbb{N})$ puis déterminer $(F^\perp)^\perp$.

**Exercice 29. (Contraction d'un espace euclidien - ESCP 2019)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme associée notée $\|\ \|$. Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Un tel endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ est appelé *une contraction. Par la suite, on dira qu'une suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de vecteurs de* $\mathbb{R}^p$ *converge vers* $z \in \mathbb{R}^p$*, et l'on notera* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$*, si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_n - z\| = 0$.

(1) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad y = \frac{1}{k}[u^k(x) - x]. \quad (*)$$

(*indication : partant d'un vecteur* $x \in E$ *tel que* $y = u(x) - x$*, établir l'égalité* $(*)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$).

(2) En déduire que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) = \{0\}$.

(3) Conclure que $\mathbb{R}^p = \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \oplus \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$.

(4) (a) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Etudier la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)\right)_{n\geq 1}$.
  (b) Soit $y \in \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Etudier la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)\right)_{n\geq 1}$ (*indication : partant d'un vecteur* $x \in E$ *tel que* $y = u(x) - x$*, utiliser le fait que* $u^k(y) = u^{k+1}(x) - u^k(x)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$).
  (c) En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k(y) = p(y)$, où $p$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

**Exercice 30. (HEC 2021)** Soit $E$ un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme $\|\ \|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $E$.

(1) Question de cours : énoncer le théorème de Pythagore.

(2) Soit $(x, y) \in E^2$. Exprimer $\langle x, y\rangle$ à l'aide de $\|x+y\|^2$ et de $\|x-y\|^2$.

(3) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose $U = X_1 v_1 + ... + X_n v_n$. Calculer l'espérance de $\|U\|^2$.

(4) En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$.

(5) A l'aide de la question (2), montrer que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale si et seulement si :

$$\forall (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

(6) Montrer que, si $\mathcal{F}$ n'est pas orthogonale, il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.