RÉSUMÉ DE COURS : ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.1 *Un endomorphisme f de E est dit symétrique si :* $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

Théorème 1.2 *L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*

Théorème 1.3 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de E, et soit f un endomorphisme de E. Alors :*

$$f \text{ est symétrique} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ \ \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle.$$

Ce résultat permet en particulier de vérifier facilement qu'un endomorphisme est symétrique. Dans ce qui suit, on va établir un autre critère pour déterminer si un endomorphisme est symétrique ou non, et ce en termes purement matriciels. Commençons par rappeler la :

Définition 1.4 *Une matrice symétrique (réelle) est une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$, on a : $a_{i,j} = a_{j,i}$.*

Théorème 1.5 *Soit f un endomorphisme de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'endomorphisme f est symétrique.*
2. *Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est symétrique.*
3. *Pour toute base orthonormée de E, la matrice de f dans cette base est symétrique.*

A présent, nous allons voir que les endomorphismes symétriques possèdent des propriétés remarquables vis-à-vis de leurs sous-espaces stables et de leurs sous-espaces propres. Plus précisément :

Théorème 1.6 *Si f est un endomorphisme symétrique de E et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Théorème 1.7 *Si $u_1, ..., u_p$ sont p vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique f associés à p valeurs propres distinctes, alors la famille $(u_1, ..., u_p)$ est orthogonale.*

Théorème 1.8 *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique de E sont 2 à 2 orthogonaux.*

Comme toute matrice symétrique est la matrice d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique (laquelle est orthonormée pour le produit scalaire canonique), le théorème 1.8 se retraduit en termes purement matriciels sous la forme suivante :

Théorème 1.9 *Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont 2 à 2 orthogonaux.*

2 Projecteur orthogonal

Définition 2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.*

A noter que le projecteur orthogonal sur F est bien défini, puisque F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E. A noter aussi que le projecteur associé à p_F est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$. Plus généralement, un projecteur de E est dit *orthogonal* si p est un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E.

Théorème 2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x)$ si et seulement si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.*

Ce résultat permet notamment de calculer explicitement l'expression du projecteur orthogonal sur F. Dans la pratique, on calcule bien souvent $y = p_F(x)$ en écrivant que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, chacune de ces relations se traduisant par un système linéaire. On résout alors la réunion de ces deux systèmes linéaires, ce qui nous donne l'expression de y en fonction de x, d'où le résultat. A noter que, si l'on dispose d'une base orthonormée pour F, alors l'expression de p_F se calcule aisément à l'aide du résultat suivant :

Théorème 2.3 *Soient F un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, ..., u_k)$ une base orthonormée de F. Alors :*

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Théorème 2.4 *Soit p un projecteur de E. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.*

Théorème 2.5 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit $x \in E$. Alors $y = p_F(x)$ si et seulement si $\|x - y\| = \min\{\|x - z\|,\ z \in F\}$.*

Le théorème 2.5 est souvent cité sous le nom de *théorème sur la projection orthogonale*. D'un point de vue géométrique, il signifie que la projection orthogonale de x sur F est l'unique vecteur $y \in F$ qui minimise la distance de x à un vecteur quelconque de F. C'est pourquoi on parle aussi de *théorème de minimisation de la norme/ou de la distance*. Par la suite, on définit *la distance d d'un vecteur x de E à un sous-espace vectoriel F de E* par :

$$\boxed{d = \|x - p_F(x)\| = \min\{\|x - z\|,\ z \in F\}.}$$

A partir du théorème 2.5, on montre (et on admettra) le :

Théorème 2.6 (Problème des moindres carrés) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de rang p, et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique vecteur colonne $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :*

$$\|AX_0 - B\| = \min\{\|AX - B\|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

De plus, le vecteur colonne X_0 est l'unique solution de l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$.

En particulier, on montre que la matrice ${}^tAA$ est inversible et que, de plus : $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$. A noter que la norme utilisée ici est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En informatique, on verra une application du théorème 2.6 à la recherche des droites de régression, c'est-à-dire les droites du plan qui minimisent la somme des carrés des distances (mesurées verticalement ou horizontalement) à une famille de points donnée par une série statistique double.

3 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

3.1 Endomorphismes symétriques

A présent, nous allons voir que les endomorphismes symétriques possèdent des propriétés remarquables vis-à-vis de la réduction des endomorphismes, et plus précisément de la diagonalisation. En effet, on montre (et nous admettrons) le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Tout endomorphisme symétrique de E admet au moins une valeur propre (réelle).*

En particulier, on en déduit le résultat suivant, plus connu sous le nom de *théorème spectral* :

Théorème 3.2 *Soit f un endomorphisme symétrique de E. Alors f est diagonalisable et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.*

En d'autres termes, on dira qu'un endomorphisme symétrique est *diagonalisable en base orthonormée*. A noter que, comme la diagonalisation s'effectue dans un espace vectoriel réel, toutes les valeurs propres de f sont réelles. A noter aussi que le théorème spectral présente surtout un intérêt théorique. En effet, il assure qu'un endomorphisme symétrique est diagonalisable, mais ne nous donne pas d'indication pour effectuer la diagonalisation (hormis le fait que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale).

3.2 Matrices symétriques

Dans ce paragraphe, nous allons voir que les matrices symétriques possèdent les mêmes propriétés remarquables de diagonalisation que les endomorphismes symétriques. Plus précisément, on a le :

Théorème 3.3 *Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur propre (réelle).*

En particulier, on en déduit une première version matricielle du théorème spectral :

Théorème 3.4 *Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.*

De façon plus concise, on dira qu'une matrice symétrique est *diagonalisable en base orthonormée.* A noter que le produit scalaire utilisé dans le théorème 3.4 est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En termes purement matriciels, le théorème spectral peut se réécrire aussi sous la forme :

Théorème 3.5 *Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$.*

A noter qu'ici, *la matrice P est la matrice de passage de la base canonique dans une base de diagonalisation.* En particulier, le théorème 3.4 nous assure que, si A est symétrique, on peut choisir pour A une base de diagonalisation orthonormée (pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Comme la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est aussi orthonormée pour le même produit scalaire, il s'ensuit que P peut être choisie orthogonale, puisque toute matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale. A noter que, comme pour les endomorphismes symétriques, ce résultat présente surtout un intérêt théorique. En effet, il assure qu'une matrice symétrique (réelle) est diagonalisable en base orthonormée, mais ne nous donne pas d'indication pour effectuer la diagonalisation (hormis le fait que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale).

4 Formes quadratiques

Dans ce paragraphe, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. De plus, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique.

Définition 4.1 *Une application $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ s'il existe une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = {}^tXAX$.*

A noter qu'on démontre (et nous admettrons) que la matrice symétrique associée à une forme quadratique est déterminée de façon unique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques (réelles) telles que ${}^tXAX = {}^tXBX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $A = B$. A noter aussi que l'on peut définir une forme quadratique à partir d'un endomorphisme symétrique. Plus précisément :

Théorème 4.2 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et soit A la matrice symétrique associée. Si f désigne l'endomorphisme symétrique canoniquement associé à la matrice A, alors on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = \langle x, f(x)\rangle$.*

Dans ce cas, on dira que *la forme quadratique q est associée à l'endomorphisme symétrique f.* En particulier, on peut utiliser le résultat ci-dessus ainsi que le théorème spectral pour obtenir une réduction (c'est-à-dire une écriture plus simple) des formes quadratiques. Plus précisément :

Théorème 4.3 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, soit f l'endomorphisme symétrique associé et soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées $x_1, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :*

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2.$$

On en déduit notamment le résultat suivant sur le signe d'une forme quadratique :

Théorème 4.4 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et soit f l'endomorphisme symétrique associé.*

1. *Si toutes les valeurs propres de f sont ≥ 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \geq 0$.*
2. *Si toutes les valeurs propres de f sont > 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$.*
3. *Si toutes les valeurs propres de f sont ≤ 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) \leq 0$.*
4. *Si toutes les valeurs propres de f sont < 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q(x) < 0$.*
5. *Si f a des valeurs propres $\neq 0$ de signes contraires, alors q n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}^n$.*

En particulier, ce résultat permet de déterminer le signe d'une forme quadratique à partir des signes des valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé. On verra plus tard des applications de ce résultat, notamment pour la recherche des extrema des fonctions de plusieurs variables.