TRAVAUX DIRIGÉS : ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

Exercice 1. Soit E un espace euclidien, soient a, b deux vecteurs non nuls de E et soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + \langle x, a\rangle b$. Montrer que φ est symétrique si et seulement si la famille (a, b) est liée.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, c'est-à-dire le produit scalaire défini pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

(1) Montrer que $f : A \longmapsto {}^tA$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Calculer $f \circ f$, et en déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 4. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, et on considère l'application f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par : $f(P) : x \longmapsto 2xP'(x) + (x^2 - 1)P''(x)$.

(1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$. Qu'en déduit-on sur f?
(3) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
(4) En déduire le spectre de f, et retrouver le résultat de la question (2).

Exercice 5. (Isométries d'un espace euclidien) Soit E un espace euclidien, soit u un élément non nul de E, soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $f : E \longrightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u$. On dit qu'un endomorphisme g de E est *une isométrie* s'il conserve les distances, c'est-à-dire si : $\forall x \in E$, $\|g(x)\| = \|x\|$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
(2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
(3) Déterminer à quelle condition sur u et α l'endomorphisme f est une isométrie. Sous cette condition, calculer $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et caractériser l'endomorphisme f.
(4) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. On pose : $P = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(h)$.
   (a) Montrer que h est une isométrie si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle h(x), h(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (b) En déduire que h est une isométrie si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Exercice 6. (Contractions d'un espace euclidien) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Un endomorphisme f de E est appelé une *contraction* si : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Montrer qu'un endomorphisme symétrique f de E est une contraction si et seulement si : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 7. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur F, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2))$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}((3, 1, 2))$.
(3) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2, 1), (1, 1, 0))$.
(4) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 1))$.
(5) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y - z + 2t = 0\}$.
(6) $E = \mathbb{R}_2[x]$ (muni du produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$) et $F = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x - 1)$.
(7) $E = \mathbb{R}_2[x]$ (muni du produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$) et $F = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x, x \longmapsto x^2)$.

Exercice 8. Soient $u = (u_1, ..., u_n)$ et $a = (a_1, ..., a_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $a \neq (0, ..., 0)$, et considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ donné par $F = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n |\ a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que la distance d de u à F est donnée par :

$$d = \frac{|a_1u_1 + ... + a_nu_n|}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}}.$$

Exercice 9. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_3[x])^2$. Existence et calcul de $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}(t^3 - at - b)^2e^{-t}dt$.

Exercice 10. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_3[x])^2$. Calculer la distance de $R : x \longmapsto x^3$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 11. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, s'il existe un entier $p>0$ tel que $A^p = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Que peut-on dire de A si l'on suppose maintenant qu'il existe un entier $p>0$ tel que $A^p = 0$?

Exercice 12. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tA = {}^tAA$. On suppose qu'il existe un entier $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $M = {}^tAA$ est nulle, puis que $A = 0$.

Exercice 13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de A.
(3) Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 14. Justifier que $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, puis la diagonaliser en base orthonormée.

Exercice 15. Etudier le signe de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ q(x,y) = x^2+xy+y^2,\quad (2)\ q(x,y) = x^2-3xy-2y^2,\quad (3)\ q(x,y,z) = x^2+2xy-xz+y^2+z^2.$$

Exercice 16. (Matrices de Gram) Soit E un espace euclidien E de dimension ≥ 1. Pour toute famille $(e_1,...,e_n)$ de vecteurs de E, on définit la matrice de Gram de $(e_1,...,e_n)$ par $G = (\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$.

(1) Soit X un vecteur colonne de composantes $x_1,...,x_n$. Calculer ${}^tXGX$ en fonction de $\sum_{i=1}^{n} x_ie_i$.
(2) En déduire que la matrice G est symétrique et à valeurs propres ≥ 0.
(3) Soit λ_1 la plus petite valeur propre de G. Montrer que : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXGX \geq \lambda_1{}^tXX$.
(4) En déduire que la famille $(e_1,...,e_n)$ est libre si et seulement si la matrice G est inversible.

Exercice 17. (HEC 2012) Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On suppose qu'il existe un réel $\alpha\geq 0$ tel que : $\forall x\in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$. Montrer que $f^2 = \alpha^2\mathrm{Id}_E$.

Exercice 18. (HEC 2014) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i\neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

(1) Montrer que, pour tout vecteur colonne non nul $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tXAX > 0$.
(2) Justifier que la matrice A est diagonalisable et inversible. Que dire du signe de ses valeurs propres?

Exercice 19. (ESCP 2017) Soit n un entier ≥ 3. On pose $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on identifie avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soient A,B deux éléments non colinéaires de E et posons $M = A^tB + B^tA$. Enfin, on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M (c'est-à-dire $f : X\longmapsto MX$), et l'on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(A,B)$.

(1) Déterminer le rang de M ainsi que le noyau de f.
(2) Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.
(3) (a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ.
 (b) Donner la matrice de φ dans la base (A,B) de E_1.
 (c) Déterminer les valeurs propres de φ.
 (d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable? Justifier.
 (e) En déduire les valeurs propres de de f.

Exercice 20. (Matrices symétriques positives) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles de taille n. Une matrice symétrique (réelle) est dite *positive* si la forme quadratique associée est positive sur $\mathbb{R}^n$.

(1) Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0.
(2) Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si : $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = {}^tBB$.
(3) Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si : $\exists S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A = S^2$.
(4) En déduire que, si A est symétrique positive inversible, alors son inverse est aussi positive.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 21. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.
(2) Déterminer une base orthonormale de chacun des sous-espaces propres de A.
(3) En déduire une matrice P inversible telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
(4) Reprendre les questions (1), (2), (3) avec la matrice B.

Exercice 22. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que A est symétrique, et on désigne par $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. En calculant $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ de deux façons, montrer que :
$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$
(2) Montrer que, pour tout espace vectoriel E de dimension finie et pour tout projecteur p de E, on a :
$$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p).$$
(3) En déduire que, si E est un espace euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et si p est un projecteur orthogonal de E, alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 23. (Polynômes de Jacobi) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt.$$

(1) Justifier que l'intégrale ci-dessus converge.
(2) Montrer que l'application $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) : x \longmapsto (x^2-1)P''(x) + (2x+1)P'(x)$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) L'endomorphisme φ est-il inversible? Justifier.
   (c) Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
   (d) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]$, on a :
$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)dt$$
   (e) Retrouver ainsi le fait que φ soit diagonalisable.

Exercice 24. (Polynômes de Laguerre) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$, on pose (sous réserve de convergence) :
$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$
De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $f(P) : x \longmapsto xP''(x) + (1-x)P'(x)$.

(1) (a) Justifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, et rappeler sa valeur.
   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$.
   (c) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
   (d) Calculer les expressions de $\varphi(x \longmapsto x^p, x \longmapsto x^q)$ et $\|x \longmapsto x^p\|$ en fonction de $p, q \in \mathbb{N}$.
   (e) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour ce produit scalaire.
(2) (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, et en déduire que, pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que $f(P_k) = -kP_k$.
   (c) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, calculer la dérivée de l'application $\varphi : t \longmapsto tP'(t)e^{-t}$.
   (d) En déduire que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (e) En déduire que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 25. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$, on désigne par $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire, calculer la distance de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, où M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26. (HEC 2017) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\ \|$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. On pose $\rho = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. Montrer que :

$$\rho = \sup\left\{\frac{|\langle f(x), x\rangle|}{\|x\|^2},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

Exercice 27. (Matrices symétriques définies positives - ESCP 2017) Soit n un entier ≥ 2 et soit S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques (réelles) de taille n, n'ayant que des valeurs propres > 0. Dans tout l'exercice, on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\ \|$.

(1) Soit A une matrice symétrique (réelle). Montrer que A appartient à S_n^{++} si et seulement si, pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX > 0$.

(2) Soit $A \in S_n^{++}$. Montrer que A^{-1} appartient à S_n^{++} et que A et A^{-1} admettent une base commune de vecteurs propres.

(3) Soit $A \in S_n^{++}$. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \geq \|X\|^4$.

(4) Soit $A \in S_n^{++}$. Dans cette question, on désigne par P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$, où $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, et l'on pose : $\kappa_A = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$.

(a) Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $Y = {}^tPX$ a pour composantes $y_1, ..., y_n$, alors :

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \kappa_A\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2\right) \times \kappa_A\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2\right).$$

(b) En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\sqrt{({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)} \leq \dfrac{\kappa_A}{2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) y_i^2\right)$

(*indication : vérifier que* $(a+b)^2 \geq 4ab$ *pour tous réels* a, b).

(c) Etudier la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t}{\lambda_n} + \dfrac{\lambda_1}{t}$ sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$.

(d) Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \leq \left(\dfrac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2}\right)^2 \|X\|^4$.

Exercice 28. (Décomposition polaire d'une matrice - ESCP 2021) Soit n un entier ≥ 2 et soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = {}^tMM$.

(1) On suppose dans cette question que M est inversible.

(a) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

(b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\mu_1, ..., \mu_n > 0$ tels que :

$$A = P\begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(c) En déduire qu'il existe une matrice symétrique S que l'on précisera telle que $A = S^2$.

(d) Montrer que $T = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale.

On admet que le résultat démontré dans la question (1) *reste valable si* M *n'est pas inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et une matrice symétrique* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $M = TS$. *Cette écriture s'appelle la décomposition polaire d'une matrice.*

(2) (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$, puis que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si et seulement si M est la matrice nulle.

(b) En étudiant l'application $h : x \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t(M + xI_n)(M + xI_n))$, montrer que : $(\mathrm{Tr}(M))^2 \leq n\mathrm{Tr}(A)$.

(c) Etudier les cas d'égalité dans l'inégalité montrée dans la question (2)(b).