TRAVAUX DIRIGÉS : RECHERCHE D'EXTREMA

1. Recherche d'extrema

Exercice 1. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ par : $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x+y}$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et donner son gradient et sa hessienne en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
(2) Etablir que f admet un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
(3) Montrer que f admet un extremum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer son gradient et sa hessienne en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) Montrer que la forme quadratique $q_{(0,0)}$ associée à la hessienne en $(0,0)$ est positive.
(4) La fonction f admet-elle un extremum local en $(0,0)$? Justifier.

Exercice 3. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \ln(x) - \ln(y)$.

(1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
(2) Montrer que l'équation $ze^z = 1$ admet une unique solution réelle > 0.
(3) Montrer que f admet sur $\mathcal{D}$ un unique point critique $A = (a,b)$, et que $a = b$.
(4) Calculer la hessienne de f et la forme quadratique $q_{(x,y)}$ associée en tout point $(x,y) \in \mathcal{D}$.
(5) Déterminer le signe de $q_{(x,y)}(u,v)$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
(6) En déduire que la fonction f présente un extremum global en A.

Exercice 4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + 7y^2$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer son gradient et sa hessienne en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
(3) Montrer que f présente un minimum local en A.
(4) Ce minimum est-il global? Justifier.

Exercice 5. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
(2) Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
(3) Etudier l'existence d'extrema locaux et globaux de f.

Exercice 6. (ESCP 2013) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, ..., x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
(2) Calculer le gradient $\nabla(f)$ de f.
(3) En déduire que f admet un unique point critique noté $\widehat{x}$ que l'on déterminera.
(4) (a) Calculer la hessienne $\nabla^2(f)(\widehat{x})$ de f en ce point critique.
  (b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tX\nabla^2(f)(\widehat{x})X > 0$.
  (c) En déduire que f admet un minimum local en $\widehat{x}$.
  (d) Ce minimum local est-il un minimum global sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Exercice 7. (HEC 2016) Soit E un espace euclidien et soit $(u_1, ..., u_p) \in E^p$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer en fonction de $u_1, ..., u_p$.

2. Recherche d'extrema sous contraintes

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par $f(x,y,z,t) = x^4+y^4+z^4+t^4$. On pose $\mathcal{C} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x+y+z+t = 1,\ x-y+z-t = 1\}$.

(1) Montrer que f admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
(2) Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^4 + (2-x)^4 \geq 2$.
(3) En déduire les extrema globaux éventuels de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 9. Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$, on pose $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

(1) Déterminer les points critiques de f.
(2) La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux? Justifier.
(3) Montrer que f admet un unique point critique A sous la contrainte $x+y+z = 1$ que l'on déterminera.
(4) Déterminer le signe de la forme quadratique q_B pour tout $B \in \mathcal{D}$.
(5) En déduire que f admet un minimum global en A sous la contrainte $x+y+z = 1$.

Exercice 10. Pour tout $(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on pose $f(x_1,...,x_n) = x_1...x_n$ et $g(x_1,...,x_n) = x_1+...+x_n$. De plus, pour tout $s > 0$, on pose $\Gamma = \{(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n |\ g(x_1,...,x_n) = s\}$.

(1) Montrer que f admet un maximum M sur Γ, et que ce dernier est atteint sur $\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$.
(2) Déterminer les points critiques de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sous la contrainte $g(x_1,...,x_n) = s$.
(3) En déduire la valeur de M en fonction de s et n puis que, pour tout $(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 11. Soit r un réel > 1. Pour tout $(x_1,...,x_n) \in]0,+\infty[^n$, on pose :

$$h(x_1,x_2,...,x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n).$$

(1) Vérifier que l'ensemble $]0,+\infty[^n$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrer que la fonction h admet un unique point critique sous la contrainte $x_1+x_2+...+x_n = nr$ que l'on déterminera.
(3) Calculer la matrice hessienne de h en tout point $(x_1,...,x_n) \in]0,+\infty[^n$.
(4) A l'aide de l'égalité de Taylor avec reste intégral, montrer que h admet un maximum global sur $]0,+\infty[^n$ sous la contrainte $x_1+x_2+...+x_n = nr$, et donner la valeur de ce maximum.

Exercice 12. (ESCP 2013) On considère l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ et la fonction f définie pour tout $(x,y) \in U$ par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(1) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U.
(3) (a) Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique de f sont solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3(x+y) & = & \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ \\ x-y & = & \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right. .$$

(b) Vérifier que la fonction $g : t \longmapsto t - \dfrac{1}{t^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
(c) En déduire que f admet un unique point critique M dans U que l'on déterminera.
(4) (a) Déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U.
(b) Qu'en déduit-on sur la nature de M? Justifier.
(5) Dans cette question, on veut étudier les extrema de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C} : x - y = -1$.
(a) Montrer que les coordonnées des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ vérifient un système d'équations que l'on déterminera.
(b) A l'aide de l'étude d'une fonction, prouver qu'il existe un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Quelle est sa nature? Justifier.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 13. Déterminer les points critiques de f et leur nature, ainsi que les extrema locaux éventuels de f, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y \quad , \quad (2)\ f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \quad , \quad (3)\ f(x,y) = xy(x+y-1) \quad ,$$

$$(4)\ f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1) \quad , \quad (5)\ f(x,y) = x[\ln^2(x) + y^2] \quad , \quad (6)\ f(x,y) = xe^y + ye^x \quad .$$

Exercice 14. Déterminer les points critiques de f et leur nature, ainsi que les extrema locaux éventuels de f, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad , \quad (2)\ f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \quad ,$$

$$(3)\ f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z \quad , \quad (4)\ f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz \quad .$$

Exercice 15. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$.

(1) Montrer que f admet deux points critiques A et B que l'on déterminera.
(2) Montrer que f présente un minimum local en A et en B.
(3) Ces minima sont-il globaux? Justifier.

Exercice 16. Soit f la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)$.

(1) Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
(2) Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.
(3) On se propose de montrer que f admet un minimum global en ces points. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(t\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2.$$

   (a) Développer $P(t)$ suivant les puissances de t.
   (b) Etablir l'inégalité recherchée en considérant le discriminant de $P(t)$.
   (c) A quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité?

Exercice 17. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}^*)^2$, on pose : $f(x,y) = x^2y\ln(x^2y^2)$.

(1) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(2) La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux? Justifier.
(3) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les extrema éventuels de f sous la contrainte $y = ax$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$.

(1) Montrer que f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer les extrema de f sous les contraintes $2x - y = 1$, $x + z = 1$.

Exercice 19. Calculer les points critiques et les extrema de f sous contrainte, et ce dans les cas suivants :

(1) $f(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2$ sous les contraintes $\mathcal{C} : x_1 + ... + x_n = n, x_1 > 0, ..., x_n > 0$.
(2) $f(x_1, ..., x_n) = x_1^4 + ... + x_n^4$ sous les contraintes $\mathcal{C} : x_1 + ... + x_n = n, x_1 > 0, ..., x_n > 0$.

Exercice 20. Soit f la fonction de $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y,z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z)$.

(1) Etudier la fonction $h : t \longmapsto t\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(2) La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur $\mathcal{D}$? Justifier.
(3) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
(4) Déterminer l'unique point critique de f sur $\mathcal{D}$.
(5) Pour tout $a > 0$, on pose : $\mathcal{C}_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y + z = 3a\}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}_a$.
   (b) En déduire que f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_a$ que l'on déterminera.

Exercice 21. Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que, si B désigne la quantité de semences de blé utilisée et N la quantité d'engrais utilisée, alors le rendement en tonnes par hectare est donné par :

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2.$$

(1) Déterminer les extrema de f et donner leur nature.
(2) Déterminer le maximum du rendement sous la contrainte de budget $B + 2N = 23$.

Exercice 22. (ESCP 2017) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

(1) (a) Déterminer les extrema locaux de f.
 (b) La fonction f admet-elle des extrema globaux? Justifier.
 (c) La restriction de f à toute droite passant par l'origine $(0, 0)$ a-t-elle un extremum en $(0, 0)$?
(2) Montrer que, pour tout $x < \dfrac{1}{2}$, il existe un unique réel y tel que $f(x, y) = 0$.

 On définit ainsi une fonction $\varphi :]-\infty, \frac{1}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, associe l'unique solution y de l'équation $f(x, y) = 0$. On admet que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

(3) Donner $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$, puis déterminer le développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 23. (HEC 2018) Dans tout l'exercice, on considère des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance notée μ et une variance notée σ^2. On considère la fonction f définie pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, ..., x_n) = E\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_i X_i - \mu\right)^2\right).$$

(1) Question de cours : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition des dérivées directionnelles première et seconde de f en un point x de Ω dans la direction $h = (h_1, ..., h_n)$. Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient et de la hessienne de f en x.
(2) (a) Justifier l'égalité : $f(x_1, ..., x_n) = \sigma^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \mu^2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - 1\right)^2$.
 (b) Justifier que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
 (c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.
(3) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a.
 (b) Montrer que f admet un minimum global en a.

Exercice 24. (ESCP 2021) Soit n un entier ≥ 2. On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on considère la fonction f_n définie pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

(1) Déterminer le rang de J_n et en déduire ses valeurs propres. La matrice J_n est-elle diagonalisable?
(2) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
(3) Montrer que f_n admet deux points critiques a et $b = -a$, avec a de coordonnées toutes positives.
(4) On admet que la hessienne de f_n en a est donnée par :

$$H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).$$

 Etablir que f_n admet un extremum local en a. Quelle est sa nature? Donner sa valeur.
 On admet que f_n possède un extremum local de nature et de valeur opposées en b.

(5) (a) Etudier la fonction $h : t \longmapsto te^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Montrer que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
 (c) En déduire que f_n admet en a et b des extrema globaux.