TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES VECTORIELS

1. Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & - & 5t & = & 1 \\ x & - & 2y & & & + & t & = & 0 \\ 2x & & & - & z & - & t & = & 2 \end{array}\right. .$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & -7 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & 5 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & & & = & 1 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 3 \end{array}\right. .$$

2. Espaces vectoriels

Exercice 4. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre et/ou génératrice dans $\mathbb{R}^3$, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $\mathcal{F} = ((1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1))$, (2) $\mathcal{F} = ((1,-1,-1),(1,1,1),(3,1,1))$,

(3) $\mathcal{F} = ((1,-1,-1),(2,-1,1))$, (4) $\mathcal{F} = ((7,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1$, $v_n = 2^n$, $w_n = 3^n$. Montrer que les suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = e^{a_k x}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.

Exercice 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \cos(kx)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre (*indication : penser à dériver*).

Exercice 8. Déterminer une base de l'espace vectoriel E dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+y-z=0\}$,
(2) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+5y-3z=-x-4y+2z=0\}$,
(3) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x-y+2z=x+y-4z=y-z+t=0\}$,
(4) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x+y-2z=x-4y+2t=0\}$.

Exercice 9. Calculer le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans chacun des cas suivants :

(1) $\mathcal{F} = ((1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6))$,
(2) $\mathcal{F} = ((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$,
(3) $\mathcal{F} = (x \longmapsto x^2, x \longmapsto (x+1)^2, x \longmapsto (x+2)^2)$,
(4) $\mathcal{F} = (x \longmapsto x^3-1, x \longmapsto 2x^3-x^2-x, x \longmapsto x^3-7x^2+5x+1, x \longmapsto x^2-3x+2)$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (-3,1,0), u_2 = (-5,2,1), u_3 = (1,-1,1), u_4 = (1,0,1)$.

(1) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(u_1, u_2, u_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Calculer le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base $\mathcal{B}$.
(3) La famille (u_1, u_2, u_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_1 + ... + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, ..., t)|\ t \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
(2) Déterminer des bases de F et G, et en déduire leurs dimensions.
(3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Calculer les coordonnées de E dans cette base.
(3) Calculer le rang de la famille (A, B, C, F). Est-ce une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} |\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0\right\}.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Donner l'expression générale des éléments de E.
(3) En déduire une base et la dimension de E.

Exercice 14. Soit n un entier ≥ 3, soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$ et considérons les ensembles définis par :

$$F_0 = \{P \in E |\ P(0) = 0\}, \quad F_1 = \{P \in E |\ P(1) = 0\}, \quad F = \{P \in E |\ P(0) = P(1) = 0\}.$$

(1) Montrer que F_0, F_1, F sont des sous-espaces vectoriels de E.
(2) Montrer que $(x \longmapsto x, x \longmapsto x^2, ..., x \longmapsto x^n)$ et $(x \longmapsto x - 1, x \longmapsto x(x-1), ..., x \longmapsto x^{n-1}(x-1))$ sont des bases de F_0 et de F_1.
(3) Déterminer une base de F, puis montrer que $E = F_0 + F_1$. Cette somme est-elle directe?

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[x]|\ \int_0^1 P(t)dt = 0\}$.
(1) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Déterminer une base et la dimension de E_n.

Exercice 16. (ESCP 2004) Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des éléments Φ de E tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi''(x) = (1 + x^2)\Phi(x)$. Par ailleurs, on désigne par f et g les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

(1) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que, si $v, w \in F$, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer que les fonctions f et g appartiennent à F, et que la famille (f, g) est libre.
(4) Soit $h \in F$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$ (*indication : calculer* $(\frac{h}{f})'$).
(5) En déduire la dimension de l'espace vectoriel F.

Exercice 17. (Polynômes interpolateurs de Lagrange - ESCP 2008) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on pose :

$$L_k : x \longmapsto \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \left(\frac{x - a_j}{a_k - a_j}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, on a $L_k(a_i) = 0$ si $k \neq i$ et $L_k(a_i) = 1$ si $k = i$.
(2) Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) Déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base $(L_0, ..., L_n)$.
(4) Montrer que $\sum_{k=0}^n L_k = 1$, puis déterminer le polynôme $Q = \sum_{k=0}^n a_k L_k$.

Exercice 18. (HEC 2013) Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[x]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in E |\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E |\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in E |\ P(x) = P(-x)\}$. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 6t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 20. Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & -1 \\ x & + & ay & + & z & = & -1 \\ ax & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercice 21. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le rang de la famille $\mathcal{F} = ((m,-1,m),(3,m,1),(1,-2,1))$.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des réels m tels que les vecteurs $u_1 = (m,1,2m-1)$, $u_2 = (1,1-m,0)$, $u_3 = (1,-1,2-m)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+3z+4t = 0\}$ et $K = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, où :

$$u_1 = (2,1,0,2), \quad u_2 = (-1,-2,3,1), \quad u_3 = (1,1,1,1), \quad u_4 = (0,0,3,1), \quad u_5 = (1,0,0,1).$$

(1) (a) Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.
  (b) Calculer le rang de (u_1,u_2,u_3,u_4). Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
  (c) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1,u_2,u_3,u_5)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
  (d) Calculer le vecteur colonne des coordonnées de u_4 dans la base $\mathcal{F}$.
(2) (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
  (b) Déterminer une base de H, et en déduire sa dimension.
  (c) Déterminer l'ensemble $H \cap \mathrm{Vect}(u_3)$. A-t-on $H + \mathrm{Vect}(u_3) = \mathbb{R}^4$? Justifier.
  (d) Calculer une base et la dimension de $H \cap K$.
  (e) En déduire que $H + K = \mathbb{R}^4$. Cette somme est-elle directe?

Exercice 24. A l'aide de la formule de Taylor, déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathcal{B} = \big(x \longmapsto 1, x \longmapsto (x-a), x \longmapsto (x-a)^2, ..., x \longmapsto (x-a)^n\big)$.

Exercice 25. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k : x \longmapsto (x-a)^k(x-b)^{n-k}$. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_n$ des réels non tous nuls et posons $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

(1) Montrer que l'ordre de multiplicité de la racine a de P est le plus petit entier k tel que $\lambda_k \neq 0$.
(2) En déduire que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n$, $v_n = n$, $w_n = 3^n$. Montrer que les suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 27. Soit $E = \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par les fonctions f_1,f_2,f_3,f_4 définies pour tout $x \in]-1,1[$ par :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer une base de F ainsi que la dimension de F.

Exercice 28. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et par G celui des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

(1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
(2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 29. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on désigne par E l'ensemble des suites réelles convergentes, par E_0 l'ensemble des suites réelles convergentes de limite nulle et par C l'ensemble des suites réelles constantes. Montrer que E, E_0, C sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis que : $E = E_0 \oplus C$.

Exercice 30. (Equations différentielles linéaires à coefficients constants) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par E_λ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f' = \lambda f$, et par F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $f''-5f'+6f = 0$.

(1) (a) Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que, pour tout $f \in E_\lambda$, la fonction $g : x \longmapsto f(x)e^{-\lambda x}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
 (c) En déduire une base et la dimension de E_λ.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = e^{3x}$.
 (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 forment une famille libre de F.
 (c) Soit $g \in F$. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto g(x)e^{-2x}$ vérifie l'équation $h'' = h'$.
 (d) En déduire que, pour tout $g \in F$, il existe des réels α_1, α_2 tels que $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.
 (e) En déduire une base et la dimension de F.

Exercice 31. (ESCP 2014) Soit n un entier ≥ 2. On désigne par $(E_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel K, on définit les ensembles :

- $L_k = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = K \right\}$.
- $C_K = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = K \right\}$.
- $L = \displaystyle\bigcup_{K\in\mathbb{R}} L_K$ et $C = \displaystyle\bigcup_{K\in\mathbb{R}} C_K$.

(1) (a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel.
 (b) Montrer que L_0 est engendré par la famille de matrices $(E_{i,j} - E_{i,n})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n-1}$.
 (c) Déterminer la dimension de L_0.

(2) (a) Soit $K \in \mathbb{R}$ et soit I_n la matrice identité de taille n. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.
 (b) Montrer que $L = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus L_0$, et en déduire la dimension de L.

(3) (a) Soit $M = (m_{i,j}) \in L_0$. Montrer que : $M \in C_0 \iff \forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0$.
 (b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (*indication : on pourra montrer que la famille* $(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1\leq i,j\leq n-1}$ *est une base de* $L_0 \cap C_0$).

(4) (a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.
 (b) Déterminer la dimension de $L \cap C$ (*indication : montrer que* $L \cap C = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus (L_0 \cap C_0)$).

Exercice 32. (ESCP 2016) On pose $S_0 : x \longmapsto 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k le polynôme défini par :

$$S_k : x \longmapsto \prod_{i=0}^{k-1} (x - i).$$

(1) (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(S_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.
 (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Prouver que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_m[x]$, il existe un unique $(m+1)$-uplet de réels $(a_0, ..., a_m)$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k S_k$.

(2) (a) Calculer $S_k(n)$ pour tous entiers naturels n, k.
 (b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[x]$ écrit dans la base $(S_k)_{0\leq k\leq n}$ sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k S_k.$$

 (i) Démontrer que, pour tout entier $N \geq n$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!}.$$

 (ii) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{P(n)}{n!}$ converge et calculer sa somme en fonction des a_k.
 (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)...(n-p)}{n!}$ et calculer sa somme.

Exercice 33. (HEC 2019) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in E$ une fonction non constante et soit n un entier ≥ 2. Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on considère l'élément f^k de E défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^k(x) = (f(x))^k$. Etudier la liberté de la famille $(f^1, f^2, ..., f^n)$.