TRAVAUX DIRIGÉS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

1. Calcul matriciel

Exercice 1. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&2\\2&2\\1&1\end{pmatrix},\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&8\\2&3&7\end{pmatrix},\qquad (4)\ \begin{pmatrix}2&3&0\\4&4&4\\3&5&-1\end{pmatrix},$$

$$(5)\ \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-3&2\\3&5&0\end{pmatrix},\ (6)\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&-1&0\end{pmatrix},\ (7)\ \begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&1&3&2\\3&1&4&3\\4&4&0&4\end{pmatrix},\ (8)\ \begin{pmatrix}1&3&4&1&1\\2&1&0&1&1\\0&2&0&1&1\\1&0&-1&4&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui calculer leur inverse :

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix},\qquad (2)\ \begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix},\qquad (3)\ \begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix},\qquad (4)\ \begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix},$$

$$(5)\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix},\ (6)\ \begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ (7)\ \begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&2\\4&2&0\end{pmatrix},\ (8)\ \begin{pmatrix}3&4&5\\5&6&7\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que $B = J + aI_n$ soit inversible.
(2) Calculer la matrice B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(1) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.
(2) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 6. (HEC 2009) Pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose :

$$M(a) = \begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&0&a_2\\0&0&0&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

(1) (a) *Question de cours* : rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1, ..., x_p)$ de vecteurs de E. Dans quel cas la famille $(x_1, ..., x_p)$ est-elle une base de $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$?
  (b) Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $(x_1, ..., x_p)$ et $(y_1, ..., y_q)$, tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?
(2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.
(3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1\leq i\leq 4}$ est libre.
(4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que, si la matrice $M(a)+\theta J$ est non inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
(5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.
  (a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que G est de dimension ≤ 12.
  (b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J (*indication : penser aux matrices ayant une colonne nulle*)?

2. Applications linéaires

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient f, g des endomorphismes de E tels que $E = \mathfrak{Im}(f) + \mathfrak{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 - f = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f^2)$ (*indication : on commencera par montrer que f^2 est un projecteur*).

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\ker(f) = \ker(f^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel et soient p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)).$$
(1) Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer la projection d'un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.
(3) En déduire le symétrique d'un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, on considère les sous-espaces vectoriels :
$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] |\ P(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_2[x] |\ P(2) = P(3) = 0\}.$$
(1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) Déterminer la projection d'un polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sur F parallèlement à G.
(3) En déduire le symétrique d'un polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sur F parallèlement à G.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
(1) Montrer par récurrence que, pour toutes formes linéaires $f_1, ..., f_p$ sur E, on a : $\dim\left(\cap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right) \geq n-p$.
(2) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E.
  (a) Donner les dimensions de $\ker(f)$ et $\ker(g)$.
  (b) A l'aide d'un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E, montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ si et seulement si les formes linéaires f et g sont colinéaires.
  (c) En déduire que, si f et g ne sont pas colinéaires, alors $\dim \ker(f) \cap \ker(g) = n - 2$.

Exercice 15. (HEC 2015) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On considère l'ensemble A défini par $A = \{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ u \circ v = 0\}$. Déterminer $\sup_{(u,v)\in A} (\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v))$.

Exercice 16. (HEC 2017) Soit E un espace vectoriel, soit p un projecteur de E et soit u un endomorphisme de E. Montrer que p et u commutent si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont stables par u, c'est-à-dire si l'on a $u(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $u(\mathfrak{Im}(p)) \subset \mathfrak{Im}(p)$.

3. Applications linéaires et matrices

Exercice 17. Montrer que l'application f est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, puis donner sa matrice dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :
(1) $n = 2$, $f(x, y) = (2x - y, x + y)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ base canonique.
(2) $n = 2$, $f(x, y) = (x + y, 2x)$, $\mathcal{B} = ((-2, 7), (3, 5))$, $\mathcal{C} =$ base canonique.
(3) $n = 2$, $f(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = ((1, 1), (1, 2))$.
(4) $n = 2$, $f(x, y) = (x + 2y, 3x - 3y)$, $\mathcal{B} = ((2, 1), (1, -1))$, $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$.
(5) $n = 3$, $f(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x + y + z, z)$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 0, 1))$, $\mathcal{C} =$ base canonique.
(6) $n = 3$, $f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, -x + z)$, $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1))$, $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Exercice 18. Montrer que l'application f est linéaire de $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ dans lui-même, puis donner sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$, et ce dans chacun des cas suivants :
$$(1)\ f(g) = g', \quad (2)\ f(g) = h : x \longmapsto g(x + a), \quad (3)\ f(g) = h : x \longmapsto g'(x + a).$$

Exercice 19. Montrer que l'application f est linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$, puis donner sa matrice dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $f(P) : x \longmapsto P(x) - P'(x)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ base canonique.
(2) $f(P) : x \longmapsto nxP(x) - x^2P'(x)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, (x-1), (x-1)^2, ..., (x-1)^n)$.
(3) $f(P) : x \longmapsto (x^2+1)P''(x) - P'(x)$, $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-2)^2, ..., (x-n)^n)$, $\mathcal{C} =$ base canonique.

Exercice 20. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$, ainsi que le rang de f, puis calculer $f \circ f$. Que constate-t-on?

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application l définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ par :

$$l(P) : x \longmapsto xP(x) + (x - x^2)P'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P''(x).$$

(1) Vérifier que l est linéaire, puis déterminer un réel a pour lequel l est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) Le réel a étant ainsi choisi, décrire le noyau et l'image de l, puis comparer l^2 et l^3.
(3) Montrer que $\mathcal{B} = (x \mapsto x, x \mapsto x-1, x \mapsto \frac{1}{2}x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis calculer $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(l)$.

Exercice 22. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts, et soit f l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n))$. Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, on pose :

$$L_i : x \longmapsto \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

(1) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
(2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
(3) Calculer l'expression de $f(L_i)$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$.
(4) En déduire que $\mathcal{C} = (L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
(5) En déduire la matrice de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

(1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Dans cette question, on suppose que la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$.
  (a) Justifier que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
  (b) En calculant $f(e_i + e_j)$, montrer que, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, on a : $\lambda_i = \lambda_j$.
  (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ (*un tel endomorphisme est appelé une homothétie*).
(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne la colonne C de composantes $0, 1, 0, ..., 0$.

Exercice 24. (HEC 2010) Dans cet exercice, on considère les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels, puis déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$. Enfin, calculer le noyau et l'image de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25. (HEC 2017) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_k : x \longmapsto x^k e^x$. De plus, on note F_3 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par f_0, f_1, f_2, f_3. Enfin, on note Φ l'application qui, à toute fonction $f \in F_3$, associe la fonction :

$$\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_\alpha^x f(t)dt.$$

(1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F_3.
(2) On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que Φ n'est pas un endomorphisme de F_3.
(3) On suppose dans cette question que $\alpha = -\infty$.
  (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F_3.
  (b) Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse M^{-1}.

4. Changement de base - Matrices semblables - Trace

Exercice 26. Déterminer la matrice de passage dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$, $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,2))$.
(2) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$, $\mathcal{B}' = ((2,1),(-1,1))$.
(3) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$, $\mathcal{B}' =$ base canonique.
(4) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((2,0,1),(1,1,1),(1,1,0))$, $\mathcal{B}' = ((0,1,2),(1,2,3),(2,1,1))$.
(5) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{B} =$ base canonique, $\mathcal{B}' = (x \mapsto 1, x \mapsto 1+x, x \mapsto 1+x+x^2, ..., x \mapsto 1+x+x^2+...+x^n)$.
(6) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x-a, x \longmapsto (x-a)^2, ..., x \longmapsto (x-a)^n)$, $\mathcal{B}' =$ base canonique.

Exercice 27. Dans ce qui suit, on désigne par A la matrice d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. A l'aide de la formule de changement de bases, déterminer la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = ((2,1),(-1,1))$, (2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = ((1,1,0),(2,1,0),(2,3,1))$,

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = ((1,-2),(-1,-1))$, (4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = ((2,0,1),(1,0,1),(2,2,1))$.

Exercice 28. Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = A - {}^tA$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il un isomorphisme?
(3) Calculer la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en déduire la trace de f.
(4) Justifier que la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathfrak{Im}(f)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(5) En déduire que M est semblable à une matrice diagonale que l'on donnera.

Exercice 29. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par H_n l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Exercice 31. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang ≤ 1.

(1) Montrer qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$.
(2) En déduire que : $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Exercice 32. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $f_a(P) : x \longmapsto (a-x)P'(x) + nP(x)$.

(1) Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Calculer la matrice M_a de f_a dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[x]$, et en déduire la trace de f_a.
(3) Calculer $f_a(x \longmapsto (x-a)^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
(4) En déduire que M_a est semblable à une matrice diagonale D_a que l'on donnera.

Exercice 33. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{Tr}(A)X = -\mathrm{Tr}(X)A$.

Exercice 34. (ESCP 2009) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application T de E dans E définie pour tout $M \in E$ par $T(M) = M - \mathrm{Tr}(M)A$.

(1) Montrer que T est un endomorphisme de E.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Tr}(A)$ pour que T soit bijectif.
(3) Caractériser l'endomorphisme T lorsque T n'est pas bijectif.

Exercice 35. (HEC 2019) On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer le rang de M.
(2) Montrer qu'il existe une matrice semblable à M possédant deux colonnes égales.

5. Exercices supplémentaires

Exercice 36. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 37. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\dim \ker(f) = 2$.
(2) Justifier l'existence de deux vecteurs $e_1, e_2 \in E$ tels que $f(e_1) \neq 0$ et $(f(e_1), e_2)$ est une base de $\ker(f)$.
(3) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), e_2, e_1)$ est une base de E, puis calculer $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
(4) En déduire que, si M est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$, alors M est semblable à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38. On considère l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un projecteur, puis déterminer des bases de son noyau, de son image et son rang.

Exercice 39. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *nilpotent* s'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. L'entier p est appelé *l'indice de nilpotence de* f.

(1) Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
(2) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre, et en déduire que $p \leq n$.
(3) On suppose que $p = n$. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 40. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM - MA$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il un isomorphisme?
(3) Calculer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en déduire la trace de f.

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $f(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

(1) Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f, puis calculer une base de $\ker(f)$.
(2) On pose $F = \ker(f)$ et $G = \mathrm{Vect}(x \longmapsto 1)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) Calculer le projeté du polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ sur F parallèlement à G.

Exercice 42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f_\lambda(P) : x \longmapsto P(x+1) + \lambda P(x)$.

(1) Montrer que f_λ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, puis donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme f_λ est-il un isomorphisme? Justifier.
(3) Calculer la trace de f_λ, puis déterminer une base du noyau et une base de l'image de f_{-1}.

Exercice 43. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f(P) : x \longmapsto (x-a)P'(x) + P(x) - P(a)$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. En déduire la trace, le rang et le noyau de f.
(3) Montrer que tout élément de $\mathfrak{Im}(f)$ est divisible par $Q : x \longmapsto x - a$, et en déduire une base de $\mathfrak{Im}(f)$.

Exercice 44. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles et soit Φ l'endomorphisme de E défini pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Déterminer les noyaux de Φ et de $\Phi \circ \Phi$, ainsi que leurs dimensions respectives. Quelle est l'image de Φ?
(2) Dans cette question, on se propose de déterminer une base et la dimension de $\ker \Phi^3$. Pour ce faire, on pose $x_n = 1$, $y_n = n$ et $z_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, on considère l'application $f : \ker \Phi^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker \Phi^3$ par $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$.
   (a) Vérifier que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\ker \Phi^3$.
   (b) Etablir que la famille $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.
   (c) Montrer que f est une application linéaire injective.
   (d) En déduire une base et la dimension de $\ker \Phi^3$.

Exercice 45. (ESCP 2011) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires. A-t-on $\ker(f) \subset \mathfrak{Im}(f)$ ou $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(f)$?

Exercice 46. (ESCP 2012) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^3$ de rang 2. Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f = p$. Calculer les rangs de f et g.

Exercice 47. (HEC 2016) Soit n un entier ≥ 2 et soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par : $m_{i,j} = i^{j-1}$. Montrer que la matrice M est inversible (*indication : résoudre l'équation* $MX = 0$).

Exercice 48. (HEC 2017) Soit n un entier ≥ 1 et soit E un espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E de rang $2n$ et soit g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathfrak{Im}(f)$.

(1) Montrer que $\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f^2)$ et $\ker(g) = \ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f)$.
(2) En déduire que $\mathrm{rg}(f^2) \geq n$.

Exercice 49. (Endomorphismes nilpotents - ESCP 2018) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Un tel endomorphisme est dit *nilpotent*.

(1) (a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, on a : $u(\ker(u^k) \subset \ker(u^{k-1})$.
  (b) Montrer que l'on a : $\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset ... \subset \ker(u^p) = E$.
  (c) On suppose qu'il existe un indice $k \in [\![1, ..., p-1]\!]$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. Etablir que $\ker(u^i) = \ker(u^{i+1})$ pour tout $i \geq k$.
  (d) Aboutir à une contradiction, et en déduire que toutes les inclusions de la question $(1)(b)$ sont strictes, c'est-à-dire $\ker(u^k) \neq \ker(u^{k+1})$ pour tout $k \in [\![1, ..., p-1]\!]$.
  (e) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(u)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker(u^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![1, ..., p-1]\!]$, une base $\mathcal{B}_k$ de $\ker(u^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\ker(u^{k+1})$. On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset ... \subset \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E. Donner l'allure de la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}_p$ et préciser sa diagonale.
(2) On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$, et Tr l'application trace.
  (a) L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel? Justifier.
  (b) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\ker(\mathrm{Tr})$.
  (c) Montrer que : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \ker(\mathrm{Tr})$.
(3) Pour tout $(i, j) \in [\![1, ..., n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se situe à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. De plus, pour tout $k \in [\![1, ..., n]\!]$, on pose :
$$N_k = E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}.$$
  (a) Montrer que la famille $\{(N_k)_{2 \leq k \leq n}, (E_{i,j})_{i \neq j}\}$ est libre.
  (b) En déduire que : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \ker(\mathrm{Tr})$.

Exercice 50. (ESCP 2019) Soit k un entier ≥ 2 et soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

(1) Soient $F_1, ..., F_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_k$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on désigne par p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement à $G_i = \displaystyle\bigoplus_{i=1,\ j \neq i}^{k} F_j$.
  (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = n$.
  (b) Montrer que $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$.
  (c) Montrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(2) Dans cette question, on considère des endomorphismes $q_1, ..., q_k$ de E, tous non nuls et tels que :
$$q_1 + q_2 + ... + q_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + ... + \mathrm{rg}(q_k) \leq n.$$
  (a) Montrer que $E = \mathfrak{Im}(q_1) \oplus \mathfrak{Im}(q_2) \oplus ... \oplus \mathfrak{Im}(q_k)$.
  (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
  (c) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme q_i est le projecteur de E sur $\mathfrak{Im}(q_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{j=1,\ j \neq i}^{k} \mathfrak{Im}(q_j)$.

Exercice 51. (HEC 2019) Soient L_1 et L_2 deux matrices triangulaires inférieures, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Soient U_1 et U_2 deux matrices triangulaires supérieures inversibles. On suppose que $L_1U_1 = L_2U_2$. Justifier que L_1 et L_2 sont inversibles, puis que $L_2^{-1}L_1$ est triangulaire inférieure, et en déduire que L_1 et L_2 sont égales.