RÉSUMÉ DE COURS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES, CHANGEMENT DE BASE, TRACE

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 *Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels E et F est dite linéaire si :*

1. *Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*
2. *Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $x \in E$, on a : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

En d'autres termes, une application est linéaire si elle envoie une somme de vecteurs sur la somme de leurs images par f, et le multiple d'un vecteur sur le multiple de son image par f. On désignera par $\mathcal{L}(E,F)$ *l'ensemble des applications linéaires de E dans F*. Un élément f de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est appelé une *forme linéaire sur E*. A noter que, pour toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on a :

$$\boxed{f(0_E) = 0_F.}$$

Définition 1.2 *Soit E un espace vectoriel. Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est appelée un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Théorème 1.3 *Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels E et F est linéaire si et seulement si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $x, y \in E$, on a :*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

En d'autres termes, une application est linéaire si elle envoie toute combinaison linéaire de deux vecteurs sur la combinaison linéaire des images de ces vecteurs pour les mêmes coefficients. Dans la pratique, on utilisera ce résultat pour vérifier qu'une application f est bien linéaire. Plus précisément, pour établir la linéarité de f, on montrera que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour toutes constantes λ, μ et tous vecteurs x, y. A noter que, par une récurrence facile, le théorème 1.3 se généralise sous la forme suivante :

Théorème 1.4 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F. Alors, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $e_1, ..., e_n \in E$, on a :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k).$$

En d'autres termes, *une application est linéaire si et seulement si elle envoie toute combinaison linéaire de vecteurs sur la combinaison linéaire des images de ces vecteurs pour les mêmes coefficients.*

Théorème 1.5 *Soient E, F des espaces vectoriels, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, et soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une famille quelconque de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad f(e_k) = \varepsilon_k.$$

En d'autres termes, le théorème 1.5 signifie qu'*une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base de son espace de départ.*

2 Opérations sur les applications linéaires

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est naturellement muni de deux opérations, à savoir *l'addition*, définie pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ par :

$$\boxed{(f+g) : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \right.}$$

et *la multiplication par un scalaire*, définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ par :

$$\boxed{\lambda.f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x) \end{array} \right.}$$

Théorème 2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f + g, \lambda.f \in \mathcal{L}(E, F)$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.*

En outre, il existe une troisième opération naturelle sur les ensembles d'applications linéaires, à savoir *la composition*. Plus précisément, pour tous espaces vectoriels E, F, G et pour toutes applications linéaires $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on pose :

$$\boxed{g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array} \right.}$$

Théorème 2.2 *Soient E, F, G des espaces vectoriels et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire. En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E.*

A noter qu'on ne peut pas composer toutes les applications linéaires entre elles. Pour pouvoir le faire, il faut et il suffit que l'espace d'arrivée de la première soit égal à l'espace de départ de la seconde. En outre, on montre (et nous admettrons) le :

Théorème 2.3 *Pour toutes applications linéaires f, g, h, on a les propriétés suivantes (sous réserve que les opérations soient bien définies) :*

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *(associativité de la composition).*
2. $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ *(distributivité de la composition par rapport à l'addition).*
3. $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ *(distributivité de la composition par rapport à l'addition).*
4. $\lambda.(g \circ f) = (\lambda.g) \circ f = g \circ (\lambda.f)$ *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

On rappelle que l'application identité de E, notée Id_E ou Id, est l'application :

$$\boxed{\mathrm{Id} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.}$$

On vérifie alors sans peine que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\boxed{f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f = f.}$$

En d'autres termes, sous réserve qu'elle soit bien définie, la composition des applications linéaires se comporte exactement comme la multiplication des matrices. En particulier, la composition n'est pas commutative, c'est-à-dire que (sous réserve que les opérations soient bien définies) :

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f \text{ en général.}}$$

De plus, la composition des applications linéaires admet des diviseurs de zéros, c'est-à-dire qu'il existe des applications linéaires non nulles f et g telles que $g \circ f$ soit l'application nulle de E dans G. A noter aussi que l'on peut toujours composer des éléments de $\mathcal{L}(E)$. De plus, sur l'ensemble $\mathcal{L}(E)$, la composition est une opération bien définie, associative et distributive par rapport à l'addition. Par convention, on posera $f^p = f \circ ... \circ f$ pour tout entier $p > 0$, et $f^0 = \mathrm{Id}_E$ si f n'est pas l'application nulle de E dans E. A noter enfin que $\mathcal{L}(E)$ contient des *éléments nilpotents*, c'est-à-dire des endomorphismes f de E non identiquement nuls pour lesquels il existe un entier $p > 0$ tel que f^p soit identiquement nul.

Définition 2.4 *On dit que deux endomorphismes f et g de E commutent si $f \circ g = g \circ f$.*

Tout comme pour les nombres réels et les matrices carrées, on montre (et nous admettrons) le :

Théorème 2.5 (Formule du binôme) *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si f et g commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

En particulier, la formule du binôme est valable pour tout endomorphisme g de E si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, car l'application $\lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec tout endomorphisme g de E.

3 Applications linéaires bijectives

Définition 3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application linéaire bijective $f : E \longrightarrow F$ est appelée un isomorphisme.*

A noter que, si f est une application linéaire bijective de E dans E, c'est-à-dire si $E = F$, alors on dit que f est un *automorphisme de E*. On le précise même si la notion d'automorphisme n'est plus au programme, vu qu'elle peut apparaître dans des sujets antérieurs à la réforme.

Théorème 3.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme.*

A noter que, si f est un isomorphisme de E dans F, alors :

$$\boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \ \text{ et } \ f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.}$$

Dans la pratique, pour déterminer la bijection réciproque d'un isomorphisme $f : E \longrightarrow F$, on cherchera à résoudre l'équation "$y = f(x)$" dans E, et ce pour tout $y \in F$. Bien souvent, la résolution de cette équation se ramène à celle d'un système linéaire $\mathcal{S}_y$ dont le second membre dépend de y. Comme f est bijective, ce système admet une unique solution pour tout second membre. On le résout par la méthode du pivot de Gauss, ce qui nous permet de trouver l'unique vecteur $x \in E$ solution de l'équation "$y = f(x)$". La bijection réciproque de f est alors l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'unique vecteur $x \in E$ solution de "$y = f(x)$".

Théorème 3.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors* $\dim E = \dim F$.

4 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 4.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le noyau de f par :* $\ker(f) = \{x \in E |\ f(x) = 0_F\}$.

La notation "ker" vient du mot allemand "kern" qui signifie "noyau" (comme on pouvait s'en douter). Historiquement, cela vient du fait que cette notion a été introduite par les mathématiciens allemands de la fin du dix-neuvième siècle.

Théorème 4.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors* $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Théorème 4.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.

En d'autres termes, l'intérêt de la notion de noyau vient de ce qu'elle permet de déterminer si une application linéaire f est injective ou pas. Dans la pratique, pour étudier l'injectivité de f, on calculera son noyau, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation "$f(x) = 0_F$" dans E, ce qui nous amène bien souvent à la résolution d'un système linéaire homogène $\mathcal{S}$. Dans ce cas, l'application f est injective si et seulement si le système linéaire $\mathcal{S}$ n'admet comme solution que la solution triviale $(0, ..., 0)$.

Définition 4.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit l'image de f par :* $\mathfrak{Im}(f) = \{y \in F |\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

Autrement dit, l'image d'une application linéaire f est l'ensemble des images d'éléments de E par f. Tout comme pour le noyau, la terminologie "$\mathfrak{Im}$", qui renvoie au mot "image", est souvent notée en alphabet gothique puisqu'elle a été introduite par les mathématiciens allemands de la fin du dix-neuvième siècle.

Théorème 4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathfrak{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Théorème 4.6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\mathfrak{Im}(f) = F$.*

En d'autres termes, l'intérêt de la notion d'image vient de ce qu'elle permet de déterminer si une application linéaire f est surjective ou pas. Dans la pratique, pour étudier la surjectivité de f, on calculera son image, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $y \in F$ pour lesquels l'équation "$y = f(x)$" admet au moins une solution dans E. Bien souvent, la résolution de l'équation "$y = f(x)$" se ramène à celle d'un système linéaire $\mathcal{S}_y$ dont le second membre dépend de y. Dans ce cas, l'application f est surjective si et seulement si le système linéaire $\mathcal{S}_y$ admet au moins une solution pour tout $y \in F$. Une des conséquences des théorèmes 4.3 et 4.6 est donnée par le :

Théorème 4.7 *Soit f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$ *et* $\mathfrak{Im}(f) = F$.

5 Projecteurs et symétries

Définition 5.1 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application $p : E \longrightarrow E$ qui, à tout vecteur $u \in E$, associe l'unique vecteur v tel que $u = v + w$, où $v \in F$ et $w \in G$.*

Dans ce cas, le vecteur $p(u) = v$ est appelé le projeté de u sur F parallèlement à G.

Théorème 5.2 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E, et soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors p est un endomorphisme de E, et de plus :*

$$\ker(p) = G \quad et \quad \mathfrak{Im}(p) = F.$$

Dans la pratique, pour calculer le projeté $v = p(u)$ d'un vecteur $u \in E$ sur F parallèlement à G, il suffit d'écrire que "$u = v + w$", avec les conditions "$v \in F$" et "$w \in G$". En général, ces trois conditions conduisent à un système linéaire dont la résolution nous donne le projeté recherché.

Théorème 5.3 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E, et soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors $F = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = \mathfrak{Im}(p)$.*

En d'autres termes, l'image de p est l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $p(u) = u$. A noter que la connaissance du projecteur p nous fournit directement les sous-espaces F et G, puisque $F = \mathfrak{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$. A noter enfin que, comme F et G sont en somme directe, on a :

$$\boxed{E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p).}$$

Théorème 5.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E, et soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors, pour tout $u \in E$, on a : $p(u) \in F$ et $u - p(u) \in G$.*

A noter enfin que les projecteurs sont caractérisés de la façon suivante :

Théorème 5.5 *Soit p un endomorphisme de E. Alors p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.*

Dans ce cas, on voit que p est un projecteur sur $\mathfrak{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Définition 5.6 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application $s : E \longrightarrow E$ qui, à tout vecteur $u \in E$, associe l'unique vecteur $s(u) = v - w$ tel que $u = v + w$, où $v \in F$ et $w \in G$.*

Dans ce cas, le vecteur $s(u)$ est appelé le symétrique de u par rapport à F et parallèlement à G. Si p désigne le projecteur sur F parallèlement à G, alors :

$$\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E.}$$

Théorème 5.7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E, et soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Alors s est un endomorphisme de E, et de plus :*

$$\ker(s - \mathrm{Id}_E) = F \quad et \quad \ker(s + \mathrm{Id}_E) = G.$$

A noter enfin que les symétries sont caractérisées de la façon suivante. Pour tout $s \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\boxed{s \text{ est une symétrie} \iff s^2 = \mathrm{Id}_E.}$$

6 Rang d'une application linéaire

Définition 6.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est défini par : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathfrak{Im}(f)$.*

Théorème 6.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors :*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), ..., f(e_n)).$$

A noter que, pour toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on a :

$$\boxed{0 \leq \mathrm{rg}(f) \leq \min\{\dim E, \dim F\}.}$$

A noter aussi que le théorème 6.2 fournit une méthode pratique de calcul du rang. En effet, pour déterminer le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on se fixe d'abord une base $(e_1, ..., e_n)$ de E. Le rang de f est alors celui de la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$, que l'on calcule par la méthode du pivot de Gauss. Au passage, cette méthode de calcul nous fournit aussi un moyen pour déterminer une base de l'image de f. A noter enfin que l'une des conséquences du théorème 6.2 est que *le rang de la famille* $(f(e_1), ..., f(e_n))$ *ne dépend pas de* $(e_1, ..., e_n)$, *mais uniquement de* f, ce qui n'est pas du tout évident a priori !

Théorème 6.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors f est surjective si et seulement si* $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Le théorème 6.2 nous donne un critère très utile de surjectivité. Dans la pratique, pour étudier la surjectivité d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, il suffit de calculer son rang. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, alors on conclut que f est surjective. Sinon, on conclut que f n'est pas surjective.

Théorème 6.4 (Théorème du rang) *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors :*

$$\dim(E) = \dim\ker(f) + \dim \mathfrak{Im}(f) = \dim\ker(f) + \mathrm{rg}(f).$$

L'un des intérêts du théorème du rang (entre autres) est de relier la dimension du noyau d'une application linéaire et de son rang. En particulier, ce théorème permet de donner le rang d'une application linéaire sans calcul si l'on connait la dimension de son noyau, ou l'inverse. Une première conséquence du théorème du rang est donné par le :

Théorème 6.5 *Soient E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie tels que $\underline{\dim E = \dim F}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

$$f \textit{ est injective} \iff f \textit{ est surjective} \iff f \textit{ est un isomorphisme.}$$

Ce résultat est particulièrement pratique lorsqu'on étudie des applications linéaires f entre des espaces vectoriels E et F de même dimension finie. Par exemple, pour montrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels de même dimension est bijective, il suffit de montrer qu'elle est soit injective, soit surjective. A contrario, une application linéaire f entre deux espaces vectoriels de même dimension, qui n'est pas injective, n'est pas surjective non plus, et vice versa. Enfin, on va terminer ce paragraphe par une deuxième application du théorème du rang. Rappelons qu'une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$, où $n = \dim(E)$.

Théorème 6.6 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension finie. Alors* $\ker(f)$ *est un hyperplan de E.*

A noter qu'une forme linéaire non nulle f est une forme linéaire qui n'est pas l'application nulle. Il se peut donc très bien que $f(x) = 0$ pour un certain vecteur x donné (ce sera le cas pour tout $x \in \ker(f)$), mais il existera aussi nécessairement un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$.

7 Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Dans cette partie, nous allons voir comment lui associer naturellement une matrice. Pour ce faire, on commence par rappeler que, pour tout vecteur X d'un espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$, on désigne par $X_\mathcal{B}$ ou $\mathfrak{mat}_\mathcal{B}(X)$ le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$. Concrètement parlant, on sait par définition d'une base que tout vecteur X de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$X = a_1e_1 + ... + a_pe_p,$$

où $a_1, ..., a_p \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ est défini par :

$$X_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

Définition 7.1 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, notée $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$, est la matrice de taille (n, p) telle que, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, la j-ème colonne de $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ soit la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.*

Dans la pratique, pour déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, on commence par calculer les images par f des vecteurs de la première base (c'est-à-dire $f(e_1), ..., f(e_p)$), puis on les exprime dans la deuxième base (c'est-à-dire $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$), ce qui revient à déterminer des réels $a_{1,1}, ..., a_{n,p}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} f(e_1) & = & a_{1,1}\varepsilon_1 & + & a_{2,1}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & a_{n,1}\varepsilon_n \\ f(e_2) & = & a_{1,2}\varepsilon_1 & + & a_{2,2}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & a_{n,2}\varepsilon_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1,p}\varepsilon_1 & + & a_{2,p}\varepsilon_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\varepsilon_n \end{array} \right. .$$

Une fois ces calculs faits, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est donnée par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \quad = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

De façon générale, on voit que l'on peut associer à une application linéaire f entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases, la matrice de f dans ces bases : cette dernière permet de "coder" complètement l'application f. En effet, comme une application linéaire f est entièrement déterminée par l'image d'une base, la matrice de f dans des bases données permet de reconstruire entièrement f.

Théorème 7.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Alors, pour tout vecteur $X \in E$, on a :*

$$f(X)_{\mathcal{B}_F} = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) X_{\mathcal{B}_E}.$$

Théorème 7.3 *Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies respectives p, n non nulles, et soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F. Alors l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui, à toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, associe la matrice $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, on a :*

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

Définition 7.4 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. Alors l'application linéaire $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = A$ est appelée l'application linéaire canoniquement associée à A.*

Dans la pratique, l'application linéaire canoniquement associée à $A = (a_{i,j})$ est définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_p) & \longmapsto & (a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p, ..., a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p) \end{array} \right. .$$

A présent, nous allons voir que les matrices d'applications linéaires (dans des bases données) se comportent particulièrement bien vis-à-vis des opérations usuelles sur les applications linéaires et sur les matrices.

Théorème 7.5 *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :*

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + \mu \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g).$$

Théorème 7.6 *Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :*

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).$$

Théorème 7.7 *Soient E et F des espaces vectoriels de même dimension finie n, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective) si et seulement si la matrice $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible, et dans ce cas :*

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)\right)^{-1}.$$

8 Rang d'une matrice

Définition 8.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang des vecteurs colonnes de A.*

En particulier, le rang d'une matrice peut se calculer comme celui d'une famille de vecteurs, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Dans ce cas, le rang de A est égal au nombre de colonnes restantes non nulles après réduction complète. De façon générale, on montre que le rang de A ne change pas par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A, et de plus :

Théorème 8.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.*

Théorème 8.3 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, soit $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F. Alors :*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), ..., f(e_p)) = \mathrm{rg}(\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)).$$

Ce théorème est tout à fait remarquable. En effet, il permet d'identifier les trois types de rang définis jusqu'à présent en Algèbre Linéaire. *En particulier, il implique que le rang de la matrice d'une application linéaire f dans des bases données ne dépend que de f, et non des bases choisies.* Une des conséquences du théorème 8.3 est le critère suivant d'inversibilité d'une matrice :

Théorème 8.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

9 Changement de base

Dans cette partie, nous allons introduire la notion de matrice de passage, qui permet de changer de base dans un espace vectoriel E de dimension finie.

Définition 9.1 *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}$.*

Définition 9.2 *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ des bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est la matrice dont la j-ème colonne est le vecteur colonne des coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.*

En d'autres termes, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dans les bases $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ de l'identité sur E, c'est-à-dire :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E).}$$

Directement à partir de la définition, on obtient le :

Théorème 9.3 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et de plus : $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.*

Théorème 9.4 (Formule de changement de base pour les vecteurs) *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit X un vecteur de E. Alors : $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$.*

En d'autres termes, le résultat ci-dessus permet de déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ si l'on connait ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. En particulier, il permet d'effectuer un changement de base sur des vecteurs.

Théorème 9.5 (Formule de changement de base pour les endomorphismes) *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E. Alors :*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

En d'autres termes, ce résultat permet de déterminer la matrice d'un endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ si l'on connait la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. En particulier, il permet d'effectuer un changement de base pour des endomorphismes.

Définition 9.6 *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

A noter que la notion de similitude est symétrique. En effet, par un calcul simple, on voit que $B = P^{-1}AP$ si et seulement si $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$. Ceci explique pourquoi on peut dire de deux matrices qu'elles sont semblables (sans préciser l'ordre dans lequel on les prend). L'un des intérêts de la notion de similitude vient de ce qu'elle permet de calculer plus facilement des puissances de matrices. Plus précisément, si $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, si l'on peut calculer explicitement les puissances de A, alors on en déduit facilement celles de B. A noter enfin que la notion de similitude peut se réinterpréter à l'aide de la formule de changement de base, et ce de la façon suivante :

Théorème 9.7 *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans des bases (éventuellement) différentes.*

Définition 9.8 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E. On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.*

En d'autres termes, F est stable par f si f envoie F dans F. A noter que, si f est un endomorphisme de E, alors $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont stables par f. En effet, tout élément de $\ker(f)$ est envoyé par f sur le vecteur nul de E. De plus, tous les vecteurs de E sont envoyés par f sur $\mathfrak{Im}(f)$, et en particulier tout élément de $\mathfrak{Im}(f)$ est envoyé par f sur $\mathfrak{Im}(f)$. On rencontrera plus tard d'autres types de sous-espaces stables par un endomorphisme f, et on verra comment les caractériser de façon matricielle.

10 Trace d'une matrice carrée

Dans cette partie, on va introduire la notion de trace d'une matrice carrée et en donner les propriétés de base. Pour ce faire, commençons par la :

Définition 10.1 *Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La trace de A, notée* $\mathrm{Tr}(A)$, *est la somme des éléments diagonaux de A, c'est-à-dire :* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Théorème 10.2 *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :* $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$.

En d'autres termes, la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Une autre propriété remarquable de la trace est donnée par le :

Théorème 10.3 *Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

A noter que ce résultat est étonnant, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. Une des conséquences remarquables du théorème 10.3 est donnée par le :

Théorème 10.4 (Invariance par changement de base) *Pour tous $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible, on a :* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

En particulier, on voit que *deux matrices semblables ont même trace.* Cette propriété nous servira tout particulièrement dans le prochain chapitre d'algèbre linéaire, lorsque l'on sera amené à diagonaliser des matrices. A noter que la propriété d'invariance par changement de base permet de définir la trace d'un endomorphisme, de la façon suivante. Etant donnés un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie (non nulle) et une base $\mathcal{B}$ quelconque de E, on définit la trace de f par :

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).$$

A priori, cette définition dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie, mais nous allons voir que ce n'est pas le cas. Pour ce faire, considérons une deuxième base $\mathcal{B}'$ quelconque de E. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes et la propriété d'invariance par changement de base de la trace, on trouve que :

$$\mathrm{Tr}\left(\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right) = \mathrm{Tr}\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).$$

En particulier, la trace de la matrice $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, la trace d'un endomorphisme f de E est bien définie, et ce indépendamment du choix d'une base.