

RÉSUMÉ DE COURS : DIAGONALISATION

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$.

1 Réduction des endomorphismes

1.1 Eléments propres d'un endomorphisme

Définition 1.1 Soit f un endomorphisme de E .

1. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé une valeur propre de f s'il existe un vecteur $x \in E$, non nul, tel que $f(x) = \lambda x$. L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f et est noté $\text{Sp}(f)$.
2. Un vecteur $x \in E$ est appelé un vecteur propre de f si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Dans ce cas, le scalaire λ est unique et est appelé la valeur propre associée au vecteur propre x .
3. Si λ est une valeur propre de f , alors l'ensemble $E_\lambda(f)$ de tous les vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = \lambda x$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

En d'autres termes, si λ est une valeur propre de f , alors :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda \text{Id}_E).$$

En particulier, tout sous-espace propre d'un endomorphisme de E est un sous-espace vectoriel de E (puisque c'est le noyau d'une application linéaire).

Théorème 1.2 Soit f un endomorphisme de E . Alors le scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

En particulier, 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injectif. A noter que, comme E est de dimension finie, les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité se confondent pour les endomorphismes. Plus précisément, un endomorphisme de E est injectif si et seulement s'il est bijectif (on parle alors d'isomorphisme de E dans E). En d'autres termes, un scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas bijectif. En particulier, f est un isomorphisme de E dans E si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f . A noter que, comme un endomorphisme de E est bijectif si et seulement s'il est surjectif, c'est-à-dire de rang n , il s'ensuit que :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) < n.$$

Cette équivalence nous fournit un moyen commode pour déterminer les valeurs propres de f . Il suffit pour cela de déterminer les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le rang de $f - \lambda \text{Id}_E$ "chute".

Théorème 1.3 Soit f un endomorphisme de E , et soient $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de f . Alors la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est libre.

Théorème 1.4 Les sous-espaces propres d'un endomorphisme f de E sont en somme directe.

Corollaire 1.5 Soit f un endomorphisme de E . Alors toute concaténation de familles libres de sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes forme une famille libre de E .

Corollaire 1.6 Soit f un endomorphisme de E . Alors : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \leq \dim(E)$.

Corollaire 1.7 Tout endomorphisme f de E admet au plus n valeurs propres, où $n = \dim(E)$.

En particulier, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.

1.2 Polynôme en un endomorphisme

Définition 1.8 Soit f un endomorphisme de E , et soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. On désigne par $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k$.

A noter que f^k correspond à f composé k fois avec lui-même, i.e. $f^k = f \circ \dots \circ f$. Par convention : $f^0 = \text{Id}_E$. Comme conséquence de la structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$, on a la :

Proposition 1.9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

Théorème 1.10 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et soit $Q \in \mathbb{R}[x]$. Alors on a : $Q(f)(u) = Q(\lambda)u$.

En particulier, on voit que, si u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ , alors u est un vecteur propre de l'endomorphisme $Q(f)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Définition 1.11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.

A titre d'exemple, toute homothétie de E , c'est-à-dire toute application de la forme λId_E , admet le polynôme $P : x \mapsto x - \lambda$ comme polynôme annulateur. De même, tout projecteur p de E admet le polynôme $P : x \mapsto x^2 - x$ comme polynôme annulateur, puisque $p^2 = p$ et donc $p^2 - p = 0$. Enfin, toute symétrie s de E admet le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 1$ comme polynôme annulateur, puisque $s^2 - \text{Id}_E = 0$.

Théorème 1.12 Tout endomorphisme f de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.

A noter qu'un polynôme annulateur n'est pas unique. En effet, tout multiple PQ d'un polynôme annulateur P de f est aussi un polynôme annulateur de f , puisque $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = 0$ d'après la proposition 1.9. L'intérêt des polynômes annulateurs vient de ce qu'ils permettent de déterminer les valeurs propres éventuelles d'un endomorphisme. Plus précisément :

Théorème 1.13 Soit f un endomorphisme de E , et soit P un polynôme annulateur de f . Alors toute valeur propre de f est une racine de P .

Dans la pratique, on utilise les polynômes annulateurs pour déterminer les valeurs propres de f comme suit. Supposons que l'on connaisse un polynôme annulateur non nul P de f . On commence d'abord par en calculer toutes les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Ensuite, on vérifie si chacune des α_i est une valeur propre ou non, ce que l'on fait, par exemple en calculant le rang de $f - \alpha_i \text{Id}_E$. Si $\text{rg}(f - \alpha_i \text{Id}_E) < n$, alors α_i est effectivement une valeur propre de f . Sinon, ça n'en est pas une. De façon équivalente, on peut vérifier que α_i est une valeur propre de f ou non, en calculant le noyau de $f - \alpha_i \text{Id}_E$, c'est-à-dire en résolvant l'équation $f(x) = \alpha_i x$. Si $\ker(f - \alpha_i \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, c'est-à-dire si l'équation $f(x) = \alpha_i x$ admet une solution distincte du vecteur nul, alors α_i est effectivement une valeur propre de f . Sinon, ça n'en est pas une.

1.3 Endomorphismes diagonalisables

Définition 1.14 Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f .

Directement à partir de la définition, on obtient le :

Théorème 1.15 Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Le résultat suivant nous donne un critère pour déterminer si un endomorphisme est diagonalisable :

Théorème 1.16 Soit f un endomorphisme de E , de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f) \iff \dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(f).$$

En particulier, la première équivalence du théorème 1.16 signifie que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$f \text{ est diagonalisable} \iff E \text{ est somme directe des sous-espaces propres de } f.$$

De même, la deuxième équivalence du théorème 1.16 signifie que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) = \dim(E).$$

Dans la pratique, on vérifie qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable comme suit. On commence tout d'abord par déterminer ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Ensuite, on détermine chacun des sous-espaces propres associés, on en calcule la dimension et enfin, on vérifie que la somme de ces dimensions est égale

à la dimension de E . Si c'est le cas, alors l'endomorphisme est diagonalisable et on obtient une base de diagonalisation de f (c'est-à-dire une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale) de la façon suivante : on détermine d'abord une base $\mathcal{B}_i$ de chacun des $E_{\lambda_i}(f)$, et la concaténation $\mathcal{B}$ de ces bases nous donne une base de diagonalisation de f (vu que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$). À noter que, si un endomorphisme de E admet n valeurs propres distinctes, alors nécessairement tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et leur somme (qui est directe) est égale à E . En particulier, on en déduit le :

Corollaire 1.17 *Soit f un endomorphisme de E . Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*

À noter que tous les endomorphismes de E ne sont pas forcément diagonalisables. C'est le cas notamment des endomorphismes nilpotents non nuls.

2 Réduction des matrices

2.1 Éléments propres d'une matrice

Définition 2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul, tel que $AX = \lambda X$. L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A et est noté $\text{Sp}(A)$.*
2. *Un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé un vecteur propre de A si $X \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$. Dans ce cas, le scalaire λ est unique et est appelé la valeur propre associée à X .*
3. *Si λ est une valeur propre de A , alors l'ensemble $E_\lambda(A)$ de tous les vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$ est appelé le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .*

En d'autres termes, si λ est une valeur propre de A , alors :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

En particulier, comme pour les endomorphismes d'un espace vectoriel, tout sous-espace propre d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En fait, le parallèle entre espaces propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée ne s'arrête pas là. En effet, on a le :

Théorème 2.2 *Soit f un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base de E , soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, soit x un vecteur de E , soit X la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de A .*
2. *x est vecteur propre de f associé à λ si et seulement si X est vecteur propre de A associé à λ .*

Plus précisément, on montre que, sous les conditions de ce théorème, alors les sous-espaces $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(f)$ sont isomorphes pour toute valeur propre λ de f ou de A .

Théorème 2.3 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

En particulier, 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible. De manière générale, si A est une matrice carrée et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors λ est valeur propre de A si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ n'est pas bijectif, ce qui revient à dire qu'il n'est pas injectif (puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie), et donc que λ est une valeur propre de f . À noter que, comme un endomorphisme est bijectif si et seulement s'il est surjectif, c'est-à-dire de rang n , il s'ensuit que :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Cette équivalence nous fournit un moyen commode pour déterminer les valeurs propres de A . Il suffit pour cela de déterminer les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le rang de $A - \lambda I_n$ "chute". À noter que, comme une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, le résultat précédent entraîne que :

Corollaire 2.4 *Les valeurs propres d'une matrice A triangulaire sont ses coefficients diagonaux.*

Dans la pratique, on détermine les valeurs propres de A en calculant le rang de $A - \lambda I_n$ en fonction de λ , ce qui se fait en réduisant la matrice $A - \lambda I_n$ par la méthode du pivot de Gauss. Cette réduction nous ramène au calcul du rang d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) dont les coefficients diagonaux dépendent polynomialement de λ . Dans ce cas, les valeurs propres de A sont les racines de ces polynômes en λ . À noter aussi que, comme pour les endomorphismes, on montre le :

Théorème 2.5 *Les sous-espaces propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.*

Corollaire 2.6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors toute concaténation de familles libres de sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 2.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leq n$.*

Corollaire 2.8 *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres.*

En particulier, une matrice carrée admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.

2.2 Polynôme en une matrice

Définition 2.9 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. On désigne par $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$.*

A noter que A^k correspond à A multipliée k fois avec elle-même, i.e. $A^k = A \times \dots \times A$. Par convention : $A^0 = I_n$. Comme conséquence de la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a la :

Proposition 2.10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

Proposition 2.11 *Soit f un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base de E , soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A)$.*

En particulier, le résultat ci-dessus explique le parallélisme qui existe entre les notions de polynôme en un endomorphisme et polynôme d'une matrice.

Théorème 2.12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et soit $Q \in \mathbb{R}[x]$. Alors on a : $Q(A)X = Q(\lambda)X$.*

En particulier, on voit que, si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors X est un vecteur propre de la matrice $Q(A)$ associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Définition 2.13 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.*

Théorème 2.14 *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.*

A noter qu'un polynôme annulateur n'est pas unique. En effet, tout multiple PQ d'un polynôme annulateur P de A est aussi un polynôme annulateur de A , puisque $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = 0$ d'après la proposition 2.10. L'intérêt des polynômes annulateurs vient de ce qu'ils permettent de déterminer les valeurs propres éventuelles d'une matrice. Plus précisément :

Théorème 2.15 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit P un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre de A est une racine de P .*

Dans la pratique, comme pour les endomorphismes, on utilise les polynômes annulateurs pour déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée A comme suit. Supposons que l'on connaisse un polynôme annulateur non nul P de A . On commence d'abord par en calculer toutes les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Ensuite, on vérifie si chacune des α_i est une valeur propre ou non, par exemple en calculant le rang de $A - \alpha_i I_n$. Si $\text{rg}(A - \alpha_i I_n) < n$, alors α_i est effectivement une valeur propre de A . Sinon, ça n'en est pas une. De façon équivalente, on peut vérifier que α_i est une valeur propre de A ou non, en résolvant l'équation $AX = \alpha_i X$. Si cette équation admet une solution distincte du vecteur colonne nul, alors α_i est effectivement une valeur propre de A . Sinon, ça n'en est pas une.

2.3 Matrices diagonalisables

Définition 2.16 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

En d'autres termes, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. L'un des intérêts de la diagonalisation des matrices vient de ce qu'elle permet de calculer plus facilement les puissances d'une matrice donnée. En effet, par une récurrence facile, on montre que, si $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^k = PD^k P^{-1}.$$

Théorème 2.17 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A) \iff \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(A) = n.$$

En particulier, la première équivalence du théorème 2.17 signifie que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ est somme directe des sous-espaces propres de } A.$$

De même, la deuxième équivalence du théorème 2.17 signifie que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_{\lambda}(A) = n.$$

Au vu des théorèmes 2.2 et 2.17, on en déduit que :

Corollaire 2.18 Soit f un endomorphisme de E , soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

En d'autres termes, pour montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable, on pourra chercher à montrer que sa matrice dans une base donnée est diagonalisable. Pour ce faire, on pourra utiliser une base dans laquelle la matrice de f est la plus simple possible (éventuellement triangulaire).

De façon générale, on vérifie dans la pratique qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable comme suit. On commence tout d'abord par déterminer ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, ce qui revient à déterminer les valeurs λ pour lesquelles $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$. Ensuite, on calcule la dimension des sous-espaces propres associés, ce que l'on peut faire en calculant une base de chacun d'entre eux. À noter qu'un moyen plus rapide consiste à remarquer que, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors pour toute valeur propre λ de A , on a d'après le théorème du rang :

$$\dim E_{\lambda}(A) = \dim E_{\lambda}(f) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n).$$

Enfin, on calcule la somme des dimensions des sous-espaces propres de A . Si cette somme est égale à n , alors la matrice A est diagonalisable et sinon elle ne l'est pas. Dans le premier cas (c'est-à-dire si A est diagonalisable), on peut chercher à diagonaliser la matrice A (c'est-à-dire à trouver des matrices D, P avec D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$) en procédant comme suit. On commence par déterminer une base $\mathcal{B}_i$ de chacun des $E_{\lambda_i}(A)$. Si $\mathcal{B}$ est la concaténation de toutes ces bases, alors P est la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$. De plus, la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i de A , chacune d'entre elles étant répétée autant de fois que la dimension du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A)$ correspondant (on parle alors de *multiplicité de la valeur propre* λ_i). À noter qu'une des propriétés remarquables de la trace en relation avec la diagonalisation est donnée par le :

Théorème 2.19 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A (comptées avec multiplicités).

À noter que la démonstration de ce résultat est à connaître par cœur ! À noter aussi que ce résultat est particulièrement pratique et facile à utiliser pour déterminer des valeurs propres si on en connaît déjà certaines, ou comme outil de vérification (c'est-à-dire pour contrôler qu'on ne s'est pas trompé dans le calcul des valeurs propres). À noter enfin que, si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes, alors nécessairement tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et leur somme (qui est directe) est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En particulier, on en déduit le :

Corollaire 2.20 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

À noter que toutes les matrices ne sont pas forcément diagonalisables. C'est le cas notamment des matrices nilpotentes non nulles.