

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n°2

Corrigé de l'exercice 1. On considère la suite (u_k) de premier terme $u_0 = 1$, de deuxième terme $u_1 = 2$ et telle que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$u_k = \frac{3u_{k-1}^2 + u_{k-2}^2}{4}.$$

Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche u_n . Pour ce faire, on va procéder de façon récursive, et ce comme suit :

```
def suite(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 2
    else:
        return (3*(suite(n-1))**2+(suite(n-2))**2)/4
```

Corrigé de l'exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^3}$.

(1) Complétons la fonction en Python suivante pour qu'elle calcule et affiche la somme S_n .

```
def somme(n):
    s=-----
    return s
```

Pour ce faire, on va utiliser les commandes spécifiques à Python pour les vecteurs, et ce comme suit :

```
def somme(n):
    s=np.sum((-1)**np.arange(1,n+1))/(np.arange(1,n+1)**3)
    return s
```

(2) A l'aide d'une boucle, écrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$ entré par l'utilisateur, calcule et affiche S_n . Pour ce faire, on va procéder comme suit :

```
def somme2(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+((-1)**k/(k**3))
    return s
```

Corrigé de l'exercice 3. Soit n un entier ≥ 1 . On peut remarquer que la somme $S = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sin(l)$ correspond à la somme des sommes cumulées du vecteur $(\sin(1), \dots, \sin(n))$. Dès lors, pour la calculer, on pourra utiliser la commande suivante :

```
s=np.sum(np.cumsum(np.arange(1,n+1)))
```

1. SUJET TYPE EDHEC-EML

Corrigé de l'exercice 4. Dans tout l'exercice, on désigne par E un espace vectoriel de dimension n (avec $n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f le réel, noté $\text{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie I : préliminaires

(1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

- (a) Montrons que : $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$. Tout d'abord, on commence par vérifier que $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont en somme directe. Pour ce faire considérons un vecteur $x \in \ker(p) \cap \mathfrak{Im}(p)$. Alors, on voit que $p(x) = 0$ et qu'il existe un vecteur z de E tel que $x = p(z)$. Comme $p \circ p = p$, ceci entraîne que :

$$0 = p(x) = p \circ p(z) = p(z) = x,$$

et donc $x = 0$. En particulier, on a $\ker(p) \cap \mathfrak{Im}(p) = \{0\}$ et $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont en somme directe. Comme de plus $\dim E = \dim \ker(p) + \dim \mathfrak{Im}(p)$ d'après le théorème du rang, on en déduit que :

$$\boxed{E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)}.$$

- (b) Établissons que $\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)$. Tout d'abord, on va montrer que $\mathfrak{Im}(p) \subset \ker(\text{Id} - p)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\mathfrak{Im}(p)$. Alors il existe un vecteur z de E tel que $x = p(z)$, ce qui entraîne que :

$$(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = p(z) - p \circ p(z) = 0,$$

car $p \circ p = p$ par hypothèse. En particulier, on a :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(p) \subset \ker(\text{Id} - p)}.$$

A présent, montrons que $\ker(\text{Id} - p) \subset \mathfrak{Im}(p)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\ker(\text{Id} - p)$. Alors, on voit que $(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = p(x)$, et donc x appartient à $\mathfrak{Im}(p)$. En particulier, on a :

$$\boxed{\ker(\text{Id} - p) \subset \mathfrak{Im}(p)}.$$

Par conséquent, on en déduit par double inclusion que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)}.$$

- (c) Montrons que : $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$. Pour ce faire, considérons une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ de $\mathfrak{Im}(p)$ et une base $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\ker(p)$. Comme $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$ d'après la question (1)(a), la concaténation $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ donne une base de E . Comme e_i appartient à $\mathfrak{Im}(p)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et que $\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)$ d'après la question (1)(b), on voit que $p(e_i) - e_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, et donc $p(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. De plus, comme e_i appartient à $\ker(p)$ pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, on voit que $p(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$. En particulier, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ceci entraîne avec les propriétés de la trace que :

$$\text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(p)) = 1 + \dots + 1 = r = \text{card}(\mathcal{B}_1) = \dim \mathfrak{Im}(p).$$

Mais par définition du rang, on en déduit que :

$$\boxed{\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)}.$$

- (2) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$\mathcal{P}(k)$: "si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$ ".

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\dim E_1 \leq \dim E_1$. A présent, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Soient $E_1, \dots, E_k, E_{k+1}$ des sous-espaces vectoriels de E . D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) = \dim(E_1 + \dots + E_k) + \dim E_{k+1} - \dim((E_1 + \dots + E_k) \cap E_{k+1}).$$

Comme $\dim((E_1 + \dots + E_k) \cap E_{k+1}) \geq 0$, ceci entraîne que :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1 + \dots + E_k) + \dim E_{k+1}.$$

Mais comme $\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$ par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k) + \dim E_{k+1},$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \geq 1$. Par conséquent, on vient de montrer que, pour tous sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_k$ de E , on a :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k).$$

Partie II : CNS (condition nécessaire et suffisante) pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit k un entier ≥ 2 . On considère des projecteurs $p_1, \dots, p_k$ de E , et l'on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

- (1) Montrons que si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur de E . Remarquons tout d'abord que q_k est un endomorphisme de E car q_k est une somme finie d'endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel. Si de plus on suppose que $p_i \circ p_j = \theta$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, alors on trouve par distributivité de la composition par rapport à l'addition que :

$$\begin{aligned} q_k^2 &= (p_1 + \dots + p_k) \circ (p_1 + \dots + p_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \circ p_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \theta \\ &= \sum_{i=1}^k p_i = q_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors :

$$q_k \text{ est un projecteur de } E.$$

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- (2) (a) Montrons que $\mathfrak{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\mathfrak{Im}(q_k)$. Alors il existe un vecteur z de E tel que $x = q_k(z)$. Comme $q_k = p_1 + \dots + p_k$, ceci entraîne que :

$$x = q_k(z) = (p_1 + \dots + p_k)(z) = p_1(z) + \dots + p_k(z).$$

Comme chaque vecteur $p_i(z)$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il s'ensuit que x appartient à $\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathfrak{Im}(q_k)$, on en déduit que :

$$\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k).$$

- (b) Etablissons tout d'abord que $\text{rg}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k))$. D'après la question précédente, on a $\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$, ce qui nous donne avec la question (2) de la partie I que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) \leq \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) \leq \dim \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \dim \mathfrak{Im}(p_k).$$

Par définition du rang, ceci entraîne que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) \leq \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) \leq \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k). \quad (*)$$

Par ailleurs, comme $q_k, p_1, \dots, p_k$ sont des projecteurs, on obtient avec la question (1)(b) et par linéarité de la trace que :

$$\text{rg}(q_k) = \text{Tr}(q_k) = \text{Tr}(p_1 + \dots + p_k) = \text{Tr}(p_1) + \dots + \text{Tr}(p_k) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k). \quad (**)$$

En associant les relations (*) et (**), il s'ensuit que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)).$$

A présent, montrons que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. D'après la question (2)(a) de la partie II, on a l'inclusion de sous-espaces vectoriels $\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. De plus, comme on vient de montrer que $\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k))$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k).}$$

- (c) Etablissons l'égalité : $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. D'après la question (2)(b) de la partie II, on sait que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Par ailleurs, on a montré à la même question que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k),$$

ce qui entraîne la relation suivante :

$$\dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1)) + \dots + \dim (\mathfrak{Im}(p_k)).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k).}$$

- (3) (a) Montrons que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $q_k \circ p_j = p_j$. Pour ce faire, considérons un vecteur $x \in E$. Comme $p_j(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_j)$ par définition et que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$ d'après la question (2)(c) de la partie II, on voit que $p_j(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(q_k)$. Dès lors, comme q_k est un projecteur de E par hypothèse, on voit d'après la question (1)(b) de la partie I que $p_j(x)$ appartient à $\ker(\text{Id} - q_k)$, ce qui entraîne que $p_j(x) - q_k \circ p_j(x) = 0$, et donc $q_k \circ p_j(x) = p_j(x)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que :

$$\boxed{q_k \circ p_j = p_j.}$$

- (b) Montrons que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et pour tout $x \in E$, on a : $\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0$. Pour ce faire, fixons un vecteur $x \in E$. Comme $q_k \circ p_j = p_j$ d'après la question précédente et que $q_k = p_1 + \dots + p_k$ par hypothèse, ceci nous donne que :

$$q_k \circ p_j(x) = \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \circ p_j(x) = p_j(x).$$

Par distributivité de la composition par rapport à l'addition, on trouve que :

$$\sum_{i=1}^k p_i \circ p_j(x) = p_j(x).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x) - p_j^2(x).$$

Comme p_j est un projecteur, on sait que $p_j = p_j^2$, et donc :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x) - p_j^2(x) = p_j(x) - p_j(x) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et pour tout $x \in E$:

$$\boxed{\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0.}$$

- (c) Montrons alors que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$. Pour ce faire, fixons un vecteur $x \in E$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0.$$

Comme $p_i(p_j(x))$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$ par hypothèse, on voit que le vecteur $u = \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. Comme cette somme est directe et que $u = \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$, on voit que cette écriture de u est sa décomposition dans la somme directe $\mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout indice $i \neq j$:

$$p_i \circ p_j(x) = 0.$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a l'égalité :

$$p_i \circ p_j = \theta.$$

- (4) A la question (1) de la partie I, on a montré que, si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur de E . De plus, on a établi la réciproque de cette assertion à la question (3)(c) de la partie II. Par conséquent, on peut en conclure que :

$$q_k \text{ est un projecteur si et seulement si, pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j, \text{ on a } p_i \circ p_j = \theta.$$

Corrigé de l'exercice 5. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dans ce qui suit, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

- (1) (a) Montrons que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$. Pour ce faire, on pose $N = M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} N &= M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ac+cd-ac-cd \\ ab+bd-ab-bd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I.$$

- (b) Montrons que M est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. Supposons tout d'abord que M soit inversible et montrons que $ad-bc \neq 0$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $ad-bc = 0$. Partant de la relation précédente, on voit que :

$$M^2 = (a+d)M.$$

Comme M est inversible, on obtient par produit avec M^{-1} que :

$$M = M^2 M^{-1} = (a+d)M M^{-1} = (a+d)I.$$

Dès lors, il s'ensuit par identification que $a = a+d = d$, $b = 0$ et $c = 0$, et donc $a = b = c = d = 0$. En particulier, la matrice M est nulle, ce qui contredit le fait qu'elle soit inversible. En d'autres termes, on vient de montrer que, si M est inversible, alors $ad-bc \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $ad-bc \neq 0$, et montrons que M est inversible. D'après la question précédente, on sait que :

$$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I.$$

Comme $ad-bc \neq 0$ par hypothèse, on obtient par des calculs simples que :

$$M \left[\frac{M - (a+d)I}{-(ad-bc)} \right] = I.$$

En particulier, il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MN = I$, et donc M est inversible. Par conséquent, on en déduit que :

$$M \text{ est inversible si et seulement si } ad-bc \neq 0.$$

- (c) Dans le cas où $ad-bc \neq 0$, écrivons M^{-1} en fonction de a, b, c, d . D'après les calculs de la question précédente, on voit que :

$$M^{-1} = \frac{M - (a+d)I}{-(ad-bc)} = \frac{1}{ad-bc} \left[- \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

- (2) (a) Montrons que la matrice αI , où $\alpha \in \mathbb{R}$, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$M^2 = I \iff \alpha^2 I^2 = I \iff \alpha^2 I = I \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\alpha I \text{ est involutive si et seulement si } \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1.}$$

- (b) Dans cette question, on suppose que $M \neq I$ et $M \neq -I$. Montrons que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$. Supposons tout d'abord que M soit involutive et distincte de I et $-I$, et montrons que $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$. Comme $M^2 = I$, on voit avec la question (1)(a) que :

$$M^2 = I = (a + d)M - (ad - bc)I.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$(a + d)M - (ad - bc + 1)I = 0.$$

Si l'un des coefficients $a + d$ ou $ad - bc + 1$ était non nul, alors les matrices M et I seraient colinéaires. Comme $M^2 = I$, la matrice M est non nulle, et donc il existerait un réel α tel que $M = \alpha I$. Mais comme M est involutive, il s'ensuivrait d'après la question précédente que $M = \pm I$, ce qui est impossible par hypothèse. Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\text{si } M \text{ est involutive, alors } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1.}$$

Réciproquement, supposons que $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$, et montrons que M est involutive. D'après la question (1)(a), on trouve que :

$$M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I = 0 \times M - (-1) \times I = I.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{si } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1, \text{ alors } M \text{ est involutive.}}$$

Par double implication, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est involutive si et seulement si } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1.}$$

- (c) Ecrivons une fonction en Python qui, à partir d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ distincte de I et $-I$, détermine si M est involutive ou pas et affiche le résultat. Pour ce faire, on pourra utiliser la question précédente de la façon suivante. On écrit une fonction qui calcule les réels $a + d$ et $ad - bc + 1$, puis qui demande s'ils sont tous deux égaux à 0 ou pas, et enfin affiche le résultat en conséquence (*on fera bien attention ici aux décalages d'indices dans les coefficients matriciels*). Plus précisément, on procédera comme suit :

```
def invol(m):
    x=m[0,0]+m[1,1]
    y=(m[0,0]*m[1,1])-(m[0,1]*m[1,0])+1
    if x==0 and y==0:
        print('la matrice M est involutive')
    else:
        print('la matrice M n est pas involutive')
```

- (3) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -1$.

- (a) Trouvons un réel α tel que $M = \alpha I + B$, où B est involutive. Pour ce faire, supposons qu'un tel réel α existe. Comme la matrice M (et donc la matrice $M - \alpha I$) n'est pas un multiple de I , on voit avec la question (2)(b) que la trace de $M - \alpha I$ (c'est-à-dire la somme " $a + d$ ") doit être égale à 0, ce qui nous donne par linéarité de la trace que :

$$\text{Tr}(M - \alpha I) = \text{Tr}(M) - \alpha \text{Tr}(I) = 5 - 1 - 2\alpha = 4 - 2\alpha = 0,$$

d'où il s'ensuit que $\alpha = 2$. Vérifions à présent que $\alpha = 2$ convient bien. Par des calculs simples, on trouve que :

$$(M - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 5-2 & -4 \\ 2 & -1-2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice $B = M - 2I$ est bien involutive, et donc :

$$\boxed{\alpha = 2.}$$

- (b) Calculons M^n en fonction de I, B, n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $M = 2I + B$ et que les matrices $2I$ et B commutent, la formule du binôme entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k}.$$

Comme $B^2 = I$, on voit que $B^{2i} = (B^2)^i = I^i = I$ et $B^{2i+1} = (B^2)^i B = I^i B = B$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Dès lors, on obtient en développant la somme ci-dessus et en séparant les termes d'indice pair et impair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= \binom{n}{0} B^0 (2I)^n + \binom{n}{1} B^1 (2I)^1 + \binom{n}{2} B^2 (2I)^2 + \dots + \binom{n}{n} B^n (2I)^0 \\ &= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} I + \dots + \binom{n}{n} 2^0 B^n \\ &= \left[\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right] I + \left[\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right] B. \end{aligned}$$

Toujours d'après la formule du binôme, on trouve que :

$$\begin{cases} (2+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} + \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \\ (2-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} - \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \end{cases}.$$

Par sommation et différence de ces égalités, on obtient que :

$$\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}(3^n + 1) \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{M^n = \frac{1}{2}(3^n + 1)I + \frac{1}{2}(3^n - 1)B.}$$

- (c) Montrons que M est inversible et vérifions que la formule de (3)(b) est encore valable pour $n = -1$. Pour ce faire, on désigne par N la matrice obtenue à l'aide de la formule ci-dessus pour $n = -1$, c'est-à-dire :

$$N = \frac{1}{2}(3^{-1} + 1)I + \frac{1}{2}(3^{-1} - 1)B = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B.$$

D'après les propriétés du calcul matriciel, on trouve que :

$$\begin{aligned} MN &= (2I + B) \left(\frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B \right) \\ &= \frac{4}{3}I \times I + \frac{2}{3}B \times I - \frac{2}{3}I \times B - \frac{1}{3}B \times B \\ &= \frac{4}{3}I + \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}B^2 \\ &= \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}B^2. \end{aligned}$$

Mais comme $B^2 = I$, on trouve que :

$$MN = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}B^2 = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}I = I.$$

Dès lors, il s'ensuit que M est inversible, d'inverse N . Mais comme N est la matrice obtenue à l'aide de la formule de la question (3)(c) pour $n = -1$, on en déduit que :

$$M \text{ est inversible, d'inverse : } M^{-1} = \frac{1}{2}(3^{-1} + 1)I + \frac{1}{2}(3^{-1} - 1)B.$$

Corrigé du problème 1.

Preliminaires :

- (1) (a) Justifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Pour ce faire, on pose $y = t^2$ et $\alpha = \frac{n+2}{2}$. Comme y tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, on obtient par croissances comparées et par composition des limites que :

$$t^{n+2} e^{-t^2} = \frac{y^\alpha}{e^y} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que $t^2(t^n e^{-t^2})$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et donc :

$$t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

- (b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. Comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair), il suffit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. De plus, comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale en question présente une impropriété en $+\infty$. Reste à étudier cette impropriété. Mais comme $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (en tant qu'intégrale de Riemann), on voit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge aussi d'après le critère de négligeabilité. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, et donc :

$$\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (c) Montrons que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge. Etant donné un polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ quelconque de $\mathbb{R}[x]$, on obtient par un calcul évident que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t^2}.$$

Mais comme chaque intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge d'après la question précédente, il s'ensuit par linéarité de l'intégrale que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (2) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n$. Pour ce faire, soient a, b des réels tels que $a < b$, et posons $u(t) = \frac{t^{n+1}}{2}$ et $v(t) = -e^{-t^2}$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et de plus $u'(t) = \frac{n+1}{2} t^n$ et $v'(t) = 2te^{-t^2}$ pour tout $t \in [a, b]$. Dès lors, par

intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b t^{n+2} e^{-t^2} dt &= \int_a^b u(t) v'(t) dt \\
 &= [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt \\
 &= \left[-\frac{t^{n+1} e^{-t^2}}{2} \right]_a^b - \int_a^b \frac{n+1}{2} t^n \times (-e^{-t^2}) dt \\
 &= -\frac{b^{n+1} e^{-b^2}}{2} + \frac{a^{n+1} e^{-a^2}}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) \int_a^b t^n e^{-t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Comme $b^{n+1} e^{-b^2}$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$ et que $a^{n+1} e^{-a^2}$ tend vers 0 quand a tend vers $-\infty$ d'après la question (1)(a), il s'ensuit par passage à la limite quand b tend vers $+\infty$, puis quand a tend vers $-\infty$ que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left(\frac{n+1}{2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2} \right) I_n.}$$

(b) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2p+1} = 0$. Par définition, on sait que :

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt.$$

Notons que la fonction $f : t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-t) = (-t)^{2p+1} e^{-(-t)^2} = (-1)^{2p+1} t^{2p+1} e^{-t^2} = -t^{2p+1} e^{-t^2} = -f(t).$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{I_{2p+1} = 0.}$$

(c) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(p) : "I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^0 e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = \frac{(0)!}{2^0 0!} \sqrt{\pi}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(p+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

D'après la question (2)(a), on trouve alors que :

$$\begin{aligned}
 I_{2p} &= \left(\frac{2p+1}{2} \right) I_{2p} \\
 &= \left(\frac{2p+1}{2} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} \\
 &= \left(\frac{(2p+1)(2p+2)}{2(2p+2)} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} \\
 &= \left(\frac{(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1)} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2^2 \times 2^{2p}(p+1)p!} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}(p+1)!} \sqrt{\pi},
 \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $p \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi}.$$

I. Calculs d'intégrales dépendant d'un paramètre :

- (1) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent. Pour ce faire, considérons la première intégrale. Comme la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme $|\sin(xt)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}.$$

Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après l'énoncé, et que les fonctions $t \mapsto |\sin(xt)e^{-t^2}|$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont positives sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(xt)e^{-t^2}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument, et donc :

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

A présent, considérons la deuxième intégrale. Comme la fonction $t \mapsto t \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme $|\cos(xt)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}.$$

Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1)(b), et que les fonctions $t \mapsto |t \cos(xt)e^{-t^2}|$ et $t \mapsto te^{-t^2}$ sont positives sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |t \cos(xt)e^{-t^2}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En d'autres termes, on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument, et donc :

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (2) On considère à présent les fonctions S et C définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt.$$

(a) Montrons que, pour tout $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

Pour ce faire, on peut remarquer que la fonction $f = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que de plus $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin''(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f sur l'intervalle I d'extrémités a et $a + \lambda$, on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \sup_{x \in I} |f''|(x) \frac{\lambda^2}{2}.$$

Mais comme $|f''(x)| = |\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in I$, on voit que $\sup_{x \in I} |f''|(x) \leq 1$, et donc :

$$\boxed{|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

(b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.$$

Pour ce faire, partant de la question précédente où l'on remplace a par xt et λ par th , on obtient que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin((x + h)t) - \sin(xt) - th \cos(xt)| \leq \frac{t^2 h^2}{2}.$$

Si l'on multiplie cette inégalité par e^{-t^2} , alors on trouve que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin((x + h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - th \cos(xt)e^{-t^2}| \leq \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2}.$$

Si l'on intègre cette inégalité entre 0 et un réel α avec $\alpha > 0$, alors on obtient avec l'intégralité triangulaire et par linéarité de l'intégrale que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\alpha \sin((x + h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^\alpha \sin(xt)e^{-t^2} dt - \int_0^\alpha th \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \\ & \leq \int_0^\alpha |\sin((x + h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - th \cos(xt)e^{-t^2}| dt \\ & \leq \int_0^\alpha \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2} dt. \end{aligned}$$

Comme les intégrales $S(x + h), S(x), C(x), \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite quand α tend vers $+\infty$ que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \sin((x + h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} th \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2} dt,$$

ce qui se traduit à l'aide des fonctions S, C et de l'intégrale I_2 sous la forme :

$$|S(x + h) - S(x) - hC(x)| \leq \frac{I_2}{2} h^2.$$

En divisant par $|h|$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$0 \leq \left| \frac{S(x + h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{I_2}{2} |h|.$$

Mais comme $\frac{I_2}{2} |h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, le théorème des gendarmes entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{S(x + h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où l'on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.}$$

- (c) Montrons que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $S' = C$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

Mais ceci signifie exactement que S est dérivable en x pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que de plus $S'(x) = C(x)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et de plus : } S' = C.}$$

- (3) (a) Etablissons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

Pour ce faire, fixons un réel $\alpha > 0$, puis posons $u(t) = \frac{1}{2} \cos(xt)$ et $v(t) = -e^{-t^2}$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$, et de plus $u'(t) = -\frac{1}{2}x \sin(xt)$ et $v'(t) = 2te^{-t^2}$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha t \cos(xt) e^{-t^2} dt &= \int_0^\alpha u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha u'(t) v(t) dt \\ &= \left[-\frac{\cos(xt) e^{-t^2}}{2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \left(-\frac{1}{2} x \sin(xt) \right) \times \left(-e^{-t^2} \right) dt \\ &= -\frac{\cos(x\alpha) e^{-\alpha^2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \int_0^\alpha \sin(xt) e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Comme $|\cos(x\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha > 0$, on voit que $\cos(x\alpha) e^{-\alpha^2}$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite quand α tend vers $+\infty$ que :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).}$$

- (b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Pour ce faire, on pose $f(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables (vu que S est dérivable d'après la question (2)(c)). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve avec les questions (2)(c) et (3)(a) que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) \right)' \\ &= 2 \left(\frac{x}{2} \right) e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} S'(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} C(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) \right) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}} S(x) + e^{\frac{x^2}{4}} - xe^{\frac{x^2}{4}} S(x) = e^{\frac{x^2}{4}}. \end{aligned}$$

Dès lors, comme les fonctions f' et $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ sont égales sur $\mathbb{R}$, leurs primitives sont aussi égales sur $\mathbb{R}$ à une constante additive près. En particulier, il existe un réel C_0 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt + C_0.$$

Mais comme $\sin(0) = 0$, on obtient par définition de S que :

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(x \cdot 0) e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dt = 0.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$f(0) = 2e^{\frac{0^2}{4}} S(0) = 0 = \int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}} dt + C_0 = C_0,$$

d'où l'on déduit que $C_0 = 0$. Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

(c) D'après la question précédente, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2e^{\frac{x^2}{4}}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Comme de plus $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et ce d'après la question (3)(a)), on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt \text{ et } C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

II. Obtention d'un développement limité

- (1) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, et donc il suffit d'établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ présente juste une impropriété en $+\infty$. Enfin, comme $1 + x^2 t^2 \geq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on trouve que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc $\int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge aussi pour tout $p \in \mathbb{N}$. En particulier, on voit en prenant $p = 0$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{l'intégrale } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (2) (a) Montrons que, pour tout $u \geq 0$, on a :

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} &= \frac{(1+u)(1-u+u^2) - 1}{1+u} \\ &= \frac{1 - u + u^2 + u - u^2 + u^3 - 1}{1+u} \\ &= \frac{u^3}{1+u}. \end{aligned}$$

Comme $u \geq 0$, on voit que $1+u \geq 1$, et donc $0 \leq \frac{u^3}{1+u} \leq u^3$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $u \geq 0$:

$$\boxed{0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.}$$

(b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $u \geq 0$:

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

En remplaçant u par $x^2 t^2$, on obtient que, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq x^6 t^6.$$

En multipliant le tout par e^{-t^2} , on trouve que, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt$ converge, et donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$ converge par linéarité. D'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, on obtient que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}] dt$ converge. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \right] dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt.$$

Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1)(c) des préliminaires et que l'intégrale $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1) de la partie III, on obtient par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt.$$

Toujours par linéarité de l'intégrale, ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq x^6 \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt.$$

Comme $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt$, on voit avec la question (2)(c) des préliminaires que :

$$I_6 = \frac{(2 \times 3)!}{2^2 \times 3!} \sqrt{\pi} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2^6 \times 3 \times 2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}.$$

En reportant ceci dans l'encadrement ci-dessus, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

Mais par définition de g , on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.}$$

- (3) Montrons que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et donnons ce développement limité. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

Par définition de I_n , ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq I_0 - I_2 x^2 + I_4 x^4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6. \quad (*)$$

A noter que $I_0 = \sqrt{\pi}$ d'après la question (2)(c) des préliminaires. De plus, on voit d'après la même question que :

$$I_2 = \frac{(2 \times 1)!}{2^{2 \times 1} 1!} \sqrt{\pi} = \frac{2}{4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Par ailleurs, on trouve avec la même question que :

$$I_4 = \frac{(2 \times 2)!}{2^{2 \times 2} 2!} \sqrt{\pi} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

En particulier, l'inégalité (*) se réécrit sous la forme suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6. \quad (**)$$

Considérons alors la fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varepsilon(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 - g(x)}{x^5}.$$

D'après l'encadrement (**), on voit que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x.$$

De même, toujours d'après (**), on constate que, pour tout $x < 0$:

$$\frac{15}{8} \sqrt{\pi} x \leq \varepsilon(x) \leq 0.$$

Dans tous les cas, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$-\frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x| \leq \varepsilon(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x|.$$

D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par ailleurs, on sait par construction de la fonction ε que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 - x^5 \varepsilon(x).$$

Par conséquent, on en déduit que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 donné par :

$$\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 + o(x^5).}$$

III. Nature d'une série :

- (1) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, et donc il suffit d'établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ présente juste une impropriété en $+\infty$. Enfin, comme $t^2 + (2p)! \geq (2p)!$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on trouve que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b), on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge aussi. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt$ converge par linéarité, ce qui entraîne que l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \text{ converge.}}$$

- (2) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$. Comme à la question précédente, on voit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt,$$

vu que toutes les intégrales en question convergent d'après les questions précédentes. Dès lors, par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt.$$

Par définition de u_p et I_{2p} , on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

- (3) Montrons que la série $\sum u_p$ converge. Tout d'abord, on voit que $\sum u_p$ est une série à termes positifs d'après la question précédente. De plus, d'après la question ci-dessus et la question (2)(c) de la première partie, on trouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \times \frac{1}{(2p)!} = \frac{1}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!} \sqrt{\pi}.$$

D'après le cours, on sait que la série exponentielle $\sum \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ converge, et donc la série $\sum \sqrt{\pi} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ converge aussi par linéarité. Dès lors, la série $\sum u_p$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_p \text{ converge.}}$$

2. Sujet type ESSEC

Corrigé du problème 2. On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$, par E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et par $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles. On fixe enfin un réel a strictement positif. Pour tout élément f de E , on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$. Les trois parties du problème traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U .

(1) Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U :

(a) *Etude de l'équation (E_f) .*

- (i) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Commençons par écrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Comme les fonctions y et exponentielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , on voit par produit que la fonction $g : x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, on a pour tout $x \in I$:

$$\boxed{g'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax}y'(x) = e^{-ax}(-ay(x) + y'(x)).}$$

Montrons alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

Pour ce faire, on part du fait que :

$$\begin{aligned}
 y \text{ est solution du problème } (E_f) &\iff \forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0 \\
 &\iff \forall x \in I, \quad g'(x) = -e^{-ax} f(x) \\
 &\iff g \text{ est une primitive de } x \mapsto -e^{-ax} f(x) \text{ sur } I \\
 &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad g(x) = K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \\
 &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left[K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right].
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{y \text{ est solution du problème } (E_f) \iff \exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left[K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right].}$$

- (ii) Montrons que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique. Pour ce faire, supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E_f) qui sont bornées sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe deux réels K_1 et K_2 tels que, pour tout $x \in I$:

$$y_1(x) = e^{ax} \left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{ax} \left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

Comme y_1 et y_2 sont bornées sur I , leur différence $y_2 - y_1$ l'est aussi. En particulier, la fonction $x \mapsto (K_1 - K_2)e^{ax}$ est bornée sur I . Comme cette fonction tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $K_1 \neq K_2$ (car $a > 0$), il s'ensuit que $K_1 = K_2$, et donc $y_1 = y_2$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } (E_f) \text{ admet une solution bornée, alors elle est unique.}}$$

- (iii) Vérifions que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente. Comme la fonction f est continue sur I par hypothèse, la fonction $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I , et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est impropre en $+\infty$. De plus, comme f appartient à E , cette fonction est bornée sur I par une constante positive que l'on notera K , et donc $|f(t)| \leq K$ pour tout $t \in I$. En particulier, ceci nous donne que $|e^{-at} f(t)| \leq Ke^{-at}$ pour tout $t \in I$. Comme $a > 0$, l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge, et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} Ke^{-at} dt$ converge par linéarité. D'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, il s'ensuit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est absolument convergente, et donc convergente. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ converge.}}$$

- (iv) Démontrons que la fonction $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur $[1, +\infty[$. D'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $x \in I$:

$$g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

Si l'on pose $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$, alors ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$g(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

En particulier, on obtient d'après la question (1)(a)(i) que g est solution de (E_f) . De plus, on trouve avec l'inégalité triangulaire que, pour tout $x \in I$:

$$|g(x)| = \left| e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} |e^{-at} f(t)| dt.$$

Comme f appartient à E , la fonction f est bornée sur I . Soit C est un majorant de $|f|$ sur I . Comme $|f(t)| \leq C$ pour tout $t \in I$, ceci entraîne par croissance et linéarité de l'intégrale que,

pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
 |g(x)| &\leq C e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt \\
 &\leq C e^{ax} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_x^y e^{-at} dt \\
 &\leq C e^{ax} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_x^y \\
 &\leq C e^{ax} \times \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{C}{a}.
 \end{aligned}$$

En particulier, la fonction g est bornée sur I , et donc g est une solution bornée de (E_f) sur I . D'après la question (1)(a)(ii), on en déduit que :

$$g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \text{ est l'unique solution bornée de } (E_f) \text{ sur } I.$$

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question (1)(a)(iv).

(b) *Linéarité de U .*

(i) Explicitons $U(f)$ dans le cas où $f = 1$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
 U(f)(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \times 1 \times dt \\
 &= e^{ax} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_x^y e^{-at} dt \\
 &= e^{ax} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_x^y \\
 &= e^{ax} \times \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$U(f) : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{a} \end{cases}.$$

(ii) Montrons que U est un endomorphisme de E . Pour ce faire, soient f_1, f_2 des éléments de E et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Comme f_1, f_2 sont continues et bornées sur I , la fonction $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est continue et bornée sur I . De plus, on obtient par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
 U(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(t) dt \\
 &= \alpha_1 e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_1(t) dt + \alpha_2 e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_2(t) dt \\
 &= \alpha_1 U(f_1)(x) + \alpha_2 U(f_2)(x),
 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $U(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 U(f_1) + \alpha_2 U(f_2)$, et donc U est linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, on sait d'après la question (1)(a)(iv) que la fonction $U(f)$ est bornée sur I . Dès lors, comme f est continue sur I , la fonction $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I . En particulier, la fonction $x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc continue) sur I comme primitive d'une fonction continue sur I . Or on voit d'après la relation de Chasles que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt.$$

En particulier, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est continue sur I comme différence d'une constante et d'une fonction continue sur I . Par produit avec la fonction $x \mapsto e^{-ax}$, il s'ensuit que la fonction $U(f)$ est continue sur I , et donc $U(f)$ appartient à E car $U(f)$ est aussi bornée sur I . En d'autres termes, l'application U envoie tout élément de E sur un élément de E , d'où l'on déduit que :

$$\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

- (iii) Montrons que l'endomorphisme U est injectif. Pour ce faire, il suffit de vérifier que $\ker(U) = \{0\}$. Soit f un élément de E tel que $U(f) = 0$. Alors, cela signifie que, pour tout $x \in I$:

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = 0.$$

Comme $e^{ax} \neq 0$ pour tout $x \in I$, ceci entraîne que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = 0.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient que, pour tout $x \in I$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt = 0.$$

Comme la fonction $x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-ax} f(x)$ sur l'intervalle I , il s'ensuit par dérivation que $-e^{-ax} f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, ce qui entraîne que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et donc $f = 0$. Par conséquent, on en déduit que $\ker(U) = \{0\}$ et :

$$\boxed{U \text{ est injectif.}}$$

- (iv) On définit les puissances successives de U par $U^0 = \text{Id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall f \in E, \forall x \in I, U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt\text{”}$$

Tout d'abord, on remarque par définition de U que, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in I$:

$$U^{0+1}(f)(x) = U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^0}{0!} e^{-at} f(t) dt,$$

et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Fixons un élément f de E et posons $g = U(f)$. Comme U est un endomorphisme de E d'après les questions précédentes, on voit que g appartient à E . Dès lors, on obtient par hypothèse de récurrence que, pour tout $x \in I$:

$$U^{n+2}(f)(x) = U^{n+1}(U(f))(x) = U^{n+1}(g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} g(t) dt.$$

Comme $g = U(f)$ est solution du problème (E_f) , on voit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, de plus $g' - ag + f = 0$ (*). Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = e^{-at} g(t)$ et $v(t) = \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = -ae^{-at} g(t) + e^{-at} g'(t) = -e^{-at} f(t)$ et $v'(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$ pour tout $t \in [x, y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} g(t) dt &= \int_x^y u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_x^y - \int_x^y u'(t) v(t) dt \\ &= \left[-e^{-at} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^y + \int_x^y e^{-at} f(t) \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &= -e^{-ay} \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} + 0 + \int_x^y e^{-at} f(t) \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} dt. \end{aligned}$$

Comme $e^{-ay}(y-x)^{n+1}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on obtient par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} g(t) dt = \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$U^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} g(t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} dt,$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E, \forall x \in I, U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.}$$

(c) *Cas des fonctions exponentielles.*

- (i) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, explicitons $U(f_k)$. Comme $k \geq 0$ et que $a > 0$, on voit que $k+a > 0$. Dès lors, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} U(f_k)(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{-kt} dt \\ &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t} dt \\ &= e^{ax} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a+k} e^{-(a+k)t} \right]_x^y \\ &= e^{ax} \frac{1}{a+k} e^{-(a+k)x} = \frac{1}{a+k} e^{-kx}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \geq 0$:

$$\boxed{U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.}$$

- (ii) Montrons que, pour tout réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, on a $\ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$. Fixons un réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$ et posons $k = \frac{1}{\lambda} - a$. Comme λ appartient à $]0, \frac{1}{a}]$, on voit que $\frac{1}{\lambda} \geq a$, et donc $k \geq 0$. De plus, d'après la question précédente, on trouve que :

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k = \frac{1}{a + \frac{1}{\lambda} - a} f_k = \lambda f_k.$$

En particulier, ceci nous donne que $(U - \lambda \text{Id}_E)(f_k) = U(f_k) - \lambda f_k = 0$. Comme la fonction f_k est non identiquement nulle sur I , il s'ensuit que $\ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall \lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right], \ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\} .}$$

- (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, explicitons tout d'abord $U^n(f_k)$. D'après la question (1)(c)(i), on sait que $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Montrons alors par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k."$$

Pour $n = 0$, on constate que $U^0(f_k) = f_k = \left(\frac{1}{a+k}\right)^0 f_k$, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k$, ce qui nous donne par linéarité de U que :

$$U^{n+1}(f_k) = U \left[\left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k \right] = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n U(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n \frac{1}{a+k} f_k = \left(\frac{1}{a+k}\right)^{n+1} f_k,$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k.}$$

A présent, pour tout $x \in I$, précisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x)$. D'après les propriétés des limites des suites géométriques, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k > 1 \\ e^{-kx} & \text{si } a+k = 1 \\ +\infty & \text{si } a+k < 1 \end{cases} .}$$

(d) *Cas des fonctions sinus et cosinus.*

Dans cet exemple seulement, on supposera que $a = 1$.

(i) Explicitons $U(\sin)$ et $U(\cos)$. Pour tout $x \in I$, on voit que :

$$U(\sin)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt.$$

Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -\cos(t)$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [x, y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_x^y e^{-t} \sin(t) dt &= \int_x^y u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_x^y - \int_x^y u'(t) v(t) dt \\ &= [-e^{-t} \cos(t)]_x^y - \int_x^y e^{-t} \cos(t) dt \\ &= -e^{-y} \cos(y) + e^{-x} \cos(x) - \int_x^y e^{-t} \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Posons maintenant $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in [x, y]$. De nouveau par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_x^y e^{-t} \sin(t) dt &= -e^{-y} \cos(y) + e^{-x} \cos(x) - \left([e^{-t} \sin(t)]_x^y - \int_x^y -\sin(t) e^{-t} dt \right) \\ &= -e^{-y} \cos(y) + e^{-x} \cos(x) - e^{-y} \sin(y) + e^{-x} \sin(x) - \int_x^y e^{-t} \sin(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier, ceci nous donne que $2 \int_x^y e^{-t} \sin(t) dt = -e^{-y} \cos(y) + e^{-x} \cos(x) - e^{-y} \sin(y) + e^{-x} \sin(x)$, et donc :

$$\int_x^y e^{-t} \sin(t) dt = \frac{1}{2} [-e^{-y} \cos(y) + e^{-x} \cos(x) - e^{-y} \sin(y) + e^{-x} \sin(x)].$$

Comme les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$, on voit que $e^{-y} \cos(y)$ et $e^{-y} \sin(y)$ tendent vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt = \frac{1}{2} [e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x)].$$

En particulier, ceci entraîne que, pour tout $x \in I$:

$$U(\sin)(x) = e^x \times \frac{1}{2} [e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x)] = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{U(\sin) = \frac{1}{2} (\cos + \sin) .}$$

Par des calculs analogues, on trouve aussi que :

$$U(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin).$$

- (ii) Montrons tout d'abord que le sous-espace P de E engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$ est stable par U . Pour ce faire, on considère un élément f de P . Par définition, il existe des réels α, β tels que $f = \alpha \sin + \beta \cos$. Comme U est linéaire d'après la question (1)(b)(ii), on trouve d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned} U(f) &= U(\alpha \sin + \beta \cos) \\ &= \alpha U(\sin) + \beta U(\cos) \\ &= \alpha \times \frac{1}{2}(\cos + \sin) + \beta \times \frac{1}{2}(\cos - \sin) \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos, \end{aligned}$$

et donc $U(f)$ appartient à P . Comme ceci est vrai pour tout $f \in P$, on en déduit que :

$$P \text{ est stable par } U.$$

A présent, montrons que $(\sin, \cos)$ est une base de P . Comme P est le sous-espace vectoriel engendré par $\sin$ et $\cos$, la famille $(\sin, \cos)$ est génératrice dans P . De plus, pour tous réels a, b tels que $a \sin + b \cos = 0$, on constate en évaluant cette relation en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$ que :

$$a \sin(0) + b \cos(0) = b = 0 \quad \text{et} \quad a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = 0,$$

d'où il s'ensuit que $a = b = 0$, et donc la famille $(\sin, \cos)$ est libre. Par conséquent :

$$(\sin, \cos) \text{ est une base de } P.$$

Enfin, écrivons la matrice M de l'endomorphisme $U_P : P \rightarrow P, f \mapsto U(f)$ dans la base $(\sin, \cos)$. D'après la question précédente, on sait que :

$$U(\sin) = \frac{1}{2}(\sin + \cos) \quad \text{et} \quad U(\cos) = \frac{1}{2}(-\sin + \cos).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calculons M^2, M^3, M^4 . Par des calculs simples, on trouve que :

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ceci nous donne que :

$$M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on obtient avec les calculs précédents que :

$$M^4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} I_2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad M^4 = \frac{-1}{4} I_2.$$

A présent, explicitons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant la dernière relation ci-dessus par M^n , on voit que $M^{n+4} = \frac{-1}{4} M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, il est facile de vérifier par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^{4n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n I, \quad M^{4n+1} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M, \quad M^{4n+2} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M^2, \quad M^{4n+3} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M^3.$$

Enfin, précisons la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini. D'après les résultats précédents et comme tous les coefficients de I, M, M^2, M^3 sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}$, on voit que tous les coefficients de $M^{4n}, M^{4n+1}, M^{4n+2}, M^{4n+3}$ sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, tous les coefficients de M^n sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{\lfloor n/4 \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, la suite géométrique $((\frac{1}{4})^n)$ tend vers 0. Par encadrement, on en déduit que :

tous les coefficients de M^n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

(e) *Une autre famille de fonctions.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n de E définie par $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$, et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établissons une relation entre $\psi_n, \varphi_n, \psi_{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que :

$$\psi_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{-t^n} dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t} t^n dt.$$

Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = -\frac{1}{1+a}e^{-(1+a)t}$ et $v(t) = t^n$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = e^{-(1+a)t}$ et $v'(t) = nt^{n-1}$ pour tout $t \in [x, y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_x^y e^{-(1+a)t} t^n dt &= \int_x^y u'(t)v(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u(t)v'(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{1+a} e^{-(1+a)t} t^n \right]_x^y - \int_x^y -\frac{1}{1+a} e^{-(1+a)t} n t^{n-1} dt \\ &= -\frac{1}{1+a} e^{-2y} y^n + \frac{1}{1+a} e^{-(1+a)x} x^n + \frac{n}{1+a} \int_x^y e^{-(1+a)t} t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Comme $e^{-(1+a)y} y^n$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on obtient par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t} t^n dt = \frac{1}{1+a} e^{-(1+a)x} x^n + \frac{n}{1+a} \int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t} t^{n-1} dt.$$

Par produit avec l'exponentielle, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t} t^n dt \\ &= \frac{1}{1+a} e^{-x} x^n + \frac{n}{1+a} e^x \int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t} t^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{1+a} e^{-x} x^n + \frac{n}{1+a} \psi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\psi_n = \frac{1}{1+a} \varphi_n + \frac{n}{1+a} \psi_{n-1}.$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrons tout d'abord que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U . Pour ce faire, on commence par vérifier par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$\mathcal{P}(n)$: " $U(\varphi_n)$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, \dots, \varphi_n$."

Tout d'abord, on sait d'après les questions précédentes que $U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{1+a} f_1 = \frac{1}{1+a} \varphi_0$, ce qui entraîne que $U(\varphi_0)$ est combinaison linéaire de φ_0 , et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après la question précédente, on sait que :

$$U(\varphi_{n+1}) = \psi_{n+1} = \frac{1}{2} \varphi_{n+1} + \frac{n+1}{2} \psi_n = \frac{1}{2} \varphi_{n+1} + \frac{n+1}{2} U(\varphi_n).$$

Comme $U(\varphi_n)$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ par hypothèse de récurrence, il s'ensuit d'après l'égalité ci-dessus que $U(\varphi_{n+1})$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U(\varphi_n) \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_0, \dots, \varphi_n.}$$

A partir de là, considérons un élément f de F_p . Par définition, il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que $f = \sum_{i=0}^p \alpha_i \varphi_i$. Par linéarité de U , on trouve que $U(f) = \sum_{i=0}^p \alpha_i U(\varphi_i)$. Comme chaque $U(\varphi_i)$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, \dots, \varphi_i$, il est combinaison linéaire de $\varphi_0, \dots, \varphi_p$ (vu que $i \leq p$), et donc il appartient à F_p . Comme F_p est un espace vectoriel, il s'ensuit que la combinaison linéaire $U(f) = \sum_{i=0}^p \alpha_i U(\varphi_i)$ appartient à F_p . Mais comme ceci est vrai pour tout $f \in F_p$, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{F_p \text{ est stable par } U.}$$

A présent, montrons que F_p admet pour base $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$. Comme F_p est engendré par $\varphi_0, \dots, \varphi_p$, la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est génératrice dans F_p . Reste à vérifier que cette famille est libre. Pour ce faire, considérons des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que $\sum_{i=0}^p \alpha_i \varphi_i = 0$. Alors on a pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^p \alpha_i x^i e^{-x} = 0.$$

Par multiplication avec l'exponentielle, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i x^i = 0.$$

En particulier, le polynôme $x \mapsto \sum_{i=0}^p \alpha_i x^i$ admet une infinité de racines, à savoir tous les éléments de I , ce qui entraîne qu'il est nul, et donc $\alpha_0 = \dots = \alpha_p = 0$. Dès lors, la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est libre, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{(\varphi_0, \dots, \varphi_p) \text{ est une base de } F_p.}$$

- (iii) On prend ici $p = 2$. Ecrivons tout d'abord la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : F_2 \longrightarrow F_2$, $f \mapsto U(f)$ dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. Comme $\varphi_0 = f_1$ par définition, on voit d'après les questions précédentes que $U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{1+a} f_1 = \frac{1}{1+a} \varphi_0$, et donc :

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{1+a} \varphi_0 + 0 \times \varphi_1 + 0 \times \varphi_2.$$

D'après la relation de la question (1)(e)(i), on trouve que :

$$\begin{aligned} U(\varphi_1) &= \frac{1}{1+a} \varphi_1 + \frac{1}{1+a} U(\varphi_0) \\ &= \frac{1}{1+a} \varphi_1 + \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1+a} \varphi_0 \\ &= \frac{1}{(1+a)^2} \varphi_0 + \frac{1}{1+a} \varphi_1 + 0 \times \varphi_2. \end{aligned}$$

Partant de là, on obtient aussi que :

$$\begin{aligned} U(\varphi_2) &= \frac{1}{1+a} \varphi_2 + \frac{2}{1+a} U(\varphi_1) \\ &= \frac{1}{1+a} \varphi_2 + \frac{2}{1+a} \left[\frac{1}{(1+a)^2} \varphi_0 + \frac{1}{1+a} \varphi_1 \right] \\ &= \frac{2}{(1+a)^3} \varphi_0 + \frac{2}{(1+a)^2} \varphi_1 + \frac{1}{1+a} \varphi_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{T_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{1+a}.}$$

A présent, calculons T_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on commence par écrire que :

$$T_2 = \alpha I + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par des calculs simples, on trouve que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $k \geq 3$, on a $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0 = 0$. Comme αI et N commutent, on obtient d'après la formule du binôme que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} T_2^n &= (\alpha I + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \alpha^{n-k} I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k \alpha^{n-k} I^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \alpha^{n-0} I^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 \alpha^{n-1} I^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 \alpha^{n-2} I^{n-2} \\ &= \alpha^n I + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} N^2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier par le calcul que cette formule est encore valide pour $n = 0$ et $n = 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_2^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} N^2.$$

Enfin, précisons la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini. D'après le résultat ci-dessus, on voit que tous les coefficients de T_2^n sont des combinaisons linéaires des termes généraux des suites (α^n) , $(n\alpha^{n-1})$, $(n^2\alpha^{n-2})$. Comme $\alpha = \frac{1}{1+a}$ et que $a > 0$, on obtient que $0 < \alpha < 1$, et donc ces trois suites convergent vers 0 par croissances comparées. Par conséquent, on en déduit que :

tous les coefficients de T_2^n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

(f) *Une autre expression de $U(f)$.*

Soit $f \in E$. Montrons que, pour tout $x \in I$, on a :

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

Pour ce faire, on pose $u = x+t$ pour tout $t \geq 0$. Alors la fonction u est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $[x, +\infty[$ et de plus, on a $du = dt$, u tend vers x quand t tend vers 0 et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Par changement de variables dans l'intégrale de droite ci-dessus, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = \int_x^{+\infty} e^{-a(u-x)} f(u) du = \int_x^{+\infty} e^{ax} e^{-au} f(u) du.$$

Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-au} f(u) du = U(f)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in I$:

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

(g) *Positivité de U .*

- (i) Pour tout $f \in E$, montrons que : $|U(f)| \leq U(|f|)$. D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on trouve que, pour tout $x \in I$ (vu que toutes les intégrales ci-dessous convergent) :

$$|U(f)(x)| = \left| e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt = U(|f|)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E$:

$$\boxed{|U(f)| \leq U(|f|)}.$$

On considère maintenant un élément φ de E à valeurs positives et l'on pose $\psi = U(\varphi)$.

- (ii) Montrons que ψ est à valeurs positives. Comme φ est positive sur I , on obtient d'après la question (1)(f) et par positivité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(x+t) dt \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est à valeurs positives.}}$$

- (iii) On suppose que φ est décroissante. Montrons tout d'abord que $a\psi \leq \varphi$. D'après les résultats sur les intégrales exponentielles, on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$. En particulier, on voit par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\varphi(x) = a\varphi(x) \times \frac{1}{a} = a\varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} ae^{-at} \varphi(x) dt.$$

Comme φ est décroissante, on voit que $\varphi(x+t) \leq \varphi(x)$ pour tout $t \geq 0$. Dès lors, on obtient par croissance et linéarité de l'intégrale et d'après la question (1)(f) que, pour tout $x \in I$:

$$a\psi(x) = aU(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} a\varphi(x+t) dt \leq \int_0^{+\infty} ae^{-at} \varphi(x) dt = \varphi(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{a\psi \leq \varphi}.$$

A présent, montrons que ψ est décroissante. Pour ce faire, fixons deux éléments x, y de I tels que $x \leq y$. Alors on voit que $x+t \leq y+t$ pour tout $t \geq 0$, et donc $\varphi(x+t) \geq \varphi(y+t)$ pour tout $t \geq 0$ vu que φ est décroissante. Dès lors, on obtient par croissance de l'intégrale et d'après la question (1)(f) que :

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(x+t) dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(y+t) dt = U(\varphi)(y) = \psi(y).$$

Comme $\psi(x) \geq \psi(y)$ pour tous $x, y \in I$ tels que $x \geq y$, on en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est décroissante sur } I}.$$

- (h) *Commutation de U avec la dérivation.*

On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) / f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 , associe sa dérivée.

- (i) Pour tout $f \in E_1$, montrons, en utilisant la question (1)(f), que : $aU(f) = f + U(f')$. Pour ce faire, fixons un élément f de E_1 et un réel $x \in I$. D'après la question (1)(f), on voit que :

$$U(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f'(t+x) dt.$$

Fixons aussi un réel $y \geq 0$ et posons $u(t) = f(x+t)$ et $v(t) = e^{-at}$ pour tout $t \in [0, y]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, y]$, les fonctions u et v le sont aussi et de plus, on a $u'(t) = f'(x+t)$ et

$v'(t) = -ae^{-at}$ pour tout $t \in [0, y]$. Dès lors, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned} \int_0^y e^{-at} f'(t+x) dt &= \int_0^y u'(t)v(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u(t)v'(t) dt \\ &= [e^{-at}f(x+t)]_0^y - \int_0^y ae^{-at}f(x+t) dt \\ &= e^{-ay}f(x+y) - f(x) + a \int_0^y e^{-at}f(x+t) dt. \end{aligned}$$

Comme la fonction f est bornée sur I et que e^{-ay} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, on voit que $f(x+y)e^{-ay}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. En particulier, on trouve par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$U(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f'(t+x) dt = -f(x) + a \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = -f(x) + aU(f)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{aU(f) = f + U(f')}.$$

- (ii) Montrons que, pour tout élément f de E_1 , on a : $D(U(f)) = U(D(f))$. Comme $U(f)$ est solution du problème (E_f) , on voit que $U(f)' - aU(f) + f = 0$. Dès lors, on trouve avec la question précédente que :

$$D(U(f)) = (U(f))' = aU(f) - f = f + U(f') - f = U(f') = U(D(f)).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E_1$:

$$\boxed{D(U(f)) = U(D(f))}.$$

- (iii) Pour toute fonction f de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouvons le résultat de la question (1)(g)(iii), c'est-à-dire : $U(f)$ est décroissante. Comme f est décroissante, on voit que $f' \leq 0$ sur I . Dès lors, on obtient avec la question précédente et la question (1)(g)(ii) que $U(f)' = D(U(f)) = U(D(f)) = U(f') \leq 0$ sur I , et donc :

$$\boxed{U(f) \text{ est décroissante.}}$$

(2) Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$:

Dans cette partie, on traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) *Résultats préliminaires.*

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I . On suppose que, pour tout $x \in I$, $\beta(x) > 0$ et que $\int_1^{+\infty} \beta(t) dt$ converge.

- (i) On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons tout d'abord que : $\exists A > 0, \forall x \geq A, \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right)$. Pour ce faire, on revient à la définition axiomatique de la limite. Comme $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$, le quotient $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall t \geq A, \quad \left| \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \right| \leq \varepsilon.$$

Fixons un réel A qui convient pour le réel $\varepsilon > 0$ en question. Comme la fonction β est positive, on voit que $|\alpha(t)| \leq \varepsilon \beta(t)$ pour tout $t \geq A$. En particulier, on obtient que, pour tout $x \geq A$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt$ est absolument convergente (et donc convergente) d'après le critère de

comparaison des intégrales de fonctions positives. De plus, d'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq A$:

$$\left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |\alpha(t)| dt \leq \int_x^{+\infty} \varepsilon \beta(t) dt = \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\boxed{\exists A > 0, \forall x \geq A, \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

En d'autres termes, on vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \left| \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} \right| \leq \varepsilon.$$

Dès lors, le quotient ci-dessus tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

- (ii) On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(x)$. Montrons que $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$. Comme $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(x)$, on voit que $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt - \int_x^{+\infty} \beta(t) dt = \int_x^{+\infty} (\alpha - \beta)(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t) dt.}$$

- (b) *Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.*

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$, montrons que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera. Pour ce faire, supposons tout d'abord que $b = 0$. Alors cela signifie que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$, et donc $f(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Par produit, on voit que $f(t)e^{-at} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-at})$. Comme la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est strictement positive et que l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge, on obtient d'après la question (2)(a)(i) que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} e^{-at} dt \right).$$

Comme à la question (1)(c)(i), on trouve que $\int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{e^{-ax}}{a}$ pour tout $x \geq 1$, et donc :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-ax}).$$

Par produit avec l'exponentielle, il s'ensuit que :

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{ax} \times e^{-ax}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1),$$

ce qui signifie exactement que $U(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} U(f)(x) = 0.}$$

Supposons maintenant que f tend vers b en $+\infty$. Alors la fonction $f - b$ tend vers 0 en $+\infty$, et donc $U(f - b)$ tend vers 0 en $+\infty$ d'après ce qui précède. Comme l'application U est linéaire et que $U(1) = \frac{1}{a}$ d'après les questions (1)(b)(i) et (1)(b)(ii), il s'ensuit que $U(f - b) = U(f) - \frac{b}{a}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} U(f)(x) = \frac{b}{a}.}$$

(c) *Cas des fonctions puissances.*

Dans cette question et la suivante, on désigne par ω un réel > 0 , par f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et l'on pose $g_\omega = U(f_\omega)$.

(i) Montrons tout d'abord que $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x)$. Pour ce faire, fixons un réel $y \geq 0$ et posons $u(t) = \frac{1}{(t+x)^\omega}$ et $v(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$ pour tout $t \in [0, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, y]$ et de plus, on a $u'(t) = -\frac{\omega}{(t+x)^{\omega+1}}$ et $v'(t) = e^{-at}$ pour tout $t \in [0, y]$. Dès lors, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned} \int_0^y e^{-at} \frac{1}{(t+x)^\omega} dt &= \int_0^y u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u'(t)v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{a}e^{-at} \frac{1}{(t+x)^\omega} \right]_0^y - \int_0^y -\frac{\omega}{(t+x)^{\omega+1}} \times -\frac{1}{a}e^{-at} dt \\ &= -\frac{1}{a}e^{-ay} \frac{1}{(y+x)^\omega} + \frac{1}{a} \frac{1}{x^\omega} - \int_0^y \frac{\omega}{a(t+x)^{\omega+1}} e^{-at} dt. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{(y+x)^\omega} e^{-ay}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ (vu que $\omega > 0$), on trouve par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus et par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} U(f_\omega)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{1}{(t+x)^\omega} dt \\ &= \frac{1}{ax^\omega} - \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{a(t+x)^{\omega+1}} e^{-at} dt \\ &= \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^{\omega+1}} e^{-at} dt \\ &= \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} U(f_\omega)(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de g_ω que :

$$\boxed{g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x).}$$

A présent, montrons que $g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$. Comme $f_{\omega+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_\omega(x))$ et que f_ω est > 0 sur I , on obtient d'après la question (2)(a)(i) que :

$$g_{\omega+1}(x) = U(f_{\omega+1})(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(U(f_\omega)(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g_\omega(x)).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\frac{f_\omega(x)}{a} = g_\omega(x) + \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} g_\omega(x) + o(g_\omega(x)).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}.}$$

(ii) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $g : t \mapsto e^{-at}$, montrons que pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k \cdot k!} (x^k - 1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que la fonction $g : t \mapsto e^{-at}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et de plus, on a $g^{(n+1)}(t) = (-a)^{n+1}e^{-at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, on a $|g^{(n+1)}(t)| \leq a^{n+1}$ pour

tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n et à la fonction g sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient que, pour tout $t > 0$:

$$\left| g(t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} g^{(k)}(0) \right| \leq \frac{a^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En divisant le tout par t , on trouve que, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k-1}}{k!} g^{(k)}(0) \right| \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!},$$

ce qui nous donne après simplification que, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right| \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!}.$$

D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right) dt \right| &\leq \int_1^x \left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right| dt \\ &\leq \int_1^x \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!} dt = \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} (x^{n+1} - 1). \quad (*) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on obtient par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} \int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right) dt &= \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-a)^k}{k!} \int_1^x t^{k-1} dt \\ &= \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1). \quad (**) \end{aligned}$$

En associant les relations (*) et (**), il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) \right| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} (x^{n+1} - 1).$$

Comme le terme de droite ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, ceci entraîne par encadrement que, pour tout $x \in I$:

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) .}$$

Par définition de g_1 et d'après la relation de Chasles, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \\ &= e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt \right) \\ &= e^{ax} \left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{g_1(x) = e^{ax} \left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right) .}$$

(d) *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω .*

On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.

- (i) Prouvons que, si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$. Comme f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, on voit par produit que :

$$e^{-at}f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-at}f_\omega(t)).$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-at}f_\omega(t)$ est > 0 sur I , on a d'après la question (2)(a)(i) que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt\right).$$

En particulier, ceci nous donne par produit que :

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(U(f_\omega(x))).$$

Par conséquent, on en déduit par définition de g et g_ω que :

$$\boxed{g \text{ est négligeable devant } g_\omega \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

- (ii) Prouvons que, si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$. Comme f est équivalente à f_ω au voisinage de $+\infty$, on voit par produit que :

$$e^{-at}f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-at}f_\omega(t).$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-at}f_\omega(t)$ est > 0 sur I , on a d'après la question (2)(a)(ii) que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt.$$

En particulier, ceci nous donne par produit que :

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} U(f_\omega(x)).$$

Dès lors, il s'ensuit par définition de g et g_ω que les fonctions g et g_ω sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Mais comme g_ω et $\frac{1}{a}f_\omega$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ d'après la question (2)(c)(ii) et que f et f_ω le sont par hypothèse, il s'ensuit que :

$$g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(x)}{a}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est équivalent à } \frac{f}{a} \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(3) Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f) :$

Dans cette partie, on s'intéresse à la convergence de $\int_1^{+\infty} U(f)(t)dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)|dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

(a) *Etudes d'exemples.*

- (i) Pour tout réel $k > 0$ et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on pose $g_k = U(f_k)$. Vérifions que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_k(t)dt$ est convergente. D'après la question (1)(c)(i), on sait que $g_k = U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k$. Comme l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt = \int_1^{+\infty} e^{-kt}dt$ converge vu que $k > 0$, on en déduit par linéarité que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g_k(t)dt \text{ est convergente.}}$$

- (ii) Pour tout réel $\omega > 0$, on note encore $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Déterminons pour quelles valeurs de ω l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt$ est convergente. D'après la question (2)(c)(ii), on sait que :

$$g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{ax^\omega}.$$

Or, on sait aussi d'après le cours que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\omega}dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$. Par linéarité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{at^\omega}dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$. Dès lors, on en déduit d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt \text{ converge si et seulement si } \omega > 1.}$$

(b) *Cas des fonctions positives.*

Dans cette question, on désigne par f un élément de E , à valeurs positives et tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. On note $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$, $g = U(f)$ et $G : x \mapsto \int_1^x g(t)dt$.

- (i) Vérifions que $G' - aG = -F + g(1)$. Comme g est continue sur I , la fonction G est par définition la primitive de g sur I qui s'annule en 1. De même, comme f est continue sur I , la fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en 1. En particulier, les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, on a $F' = f$ et $G' = g$. Posons alors :

$$H = G' - aG + (F - g(1)) = g - aG + F - g(1).$$

Comme g est l'unique solution du problème (E_f) qui est bornée sur I , la fonction g est dérivable sur I . Dès lors, la fonction H est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I et de plus, on a pour tout $x \in I$:

$$H'(x) = g'(x) - ag(x) + f(x) = 0,$$

vu que g est solution de (E_f) . En particulier, la fonction H est constante sur l'intervalle I . Mais comme $F(1) = G(1) = 0$ par construction, on trouve que :

$$H(1) = g(1) - aG(1) + F(1) - g(1) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que H est nulle sur I , et donc :

$$\boxed{G' - aG = -F + g(1)}.$$

- (ii) Justifions tout d'abord que F appartient à E . Comme F est une primitive de f sur I , la fonction F est dérivable (et donc continue) sur I . De plus, comme f est positive sur I par hypothèse, on voit que $F' = f \geq 0$, et donc F est croissante sur I . En outre, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge par hypothèse, on obtient que :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

En particulier, comme F est croissante sur I , il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$F(1) \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t)dt,$$

et donc la fonction F est bornée. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{F \in E}.$$

A présent, montrons qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, on a :

$$G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

D'après la question précédente, on voit que la fonction G est solution de l'équation $(E_{F-g(1)})$. Dès lors, d'après la question (1)(a)(i), il existe un réel K_0 tel que, pour tout $x \in I$, on a :

$$G(x) = e^{ax} \left(K_0 - \int_1^x e^{-at} [F(t) - g(1)] dt \right).$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{ax} \left(K_0 - \int_1^x e^{-at} [F(t) - g(1)] dt \right) \\ &= e^{ax} \left(K_0 - \int_1^x e^{-at} F(t) dt + g(1) \int_1^x e^{-at} dt \right) \\ &= e^{ax} \left(K_0 - \int_1^x e^{-at} F(t) dt + g(1) \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_1^x \right) \\ &= e^{ax} \left(K_0 - \int_1^x e^{-at} F(t) dt - \frac{g(1)}{a} e^{-ax} + \frac{g(1)}{a} e^{-a} \right). \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = e^{ax} \left(K_0 - \int_1^{+\infty} e^{-at} F(t) dt + \int_x^{+\infty} e^{-at} F(t) dt - \frac{g(1)}{a} e^{-ax} + \frac{g(1)}{a} e^{-a} \right).$$

Si l'on pose $K = K_0 - \int_1^{+\infty} e^{-at} F(t) dt + \frac{g(1)}{a} e^{-a}$, on voit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{ax} \left(K + \int_x^{+\infty} e^{-at} F(t) dt - \frac{g(1)}{a} e^{-ax} \right) \\ &= K e^{ax} + e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} F(t) dt - \frac{g(1)}{a}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de $U(F)$ que, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = K e^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

- (iii) Vérifions que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I . Comme U est un endomorphisme de E d'après la question (1)(b)(ii) et que $g = U(f)$, la fonction g est bornée sur I . Considérons alors un réel $M \geq 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \in I$:

$$\left| \int_1^x g(t) dt \right| \leq \int_1^x |g(t)| dt \leq \int_1^x M dt = M(x-1).$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$\left| \frac{G(x)}{x} \right| \leq M \frac{(x-1)}{x} \leq M.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{la fonction } x \mapsto \frac{G(x)}{x} \text{ est bornée sur } I.$$

- (iv) Montrons que $K = 0$ et $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. D'après la question (3)(b)(ii), on a pour tout $x \in I$:

$$G(x) = K e^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

Après division par x et réarrangement, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$K \frac{e^{ax}}{x} = \frac{G(x)}{x} - \frac{[U(F)](x)}{x} + \frac{g(1)}{ax}.$$

Comme U est un endomorphisme de E d'après la question (1)(b)(ii), la fonction $U(F)$ est bornée sur I . En particulier, il est facile de voir que les fonctions $x \mapsto \frac{[U(F)](x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{g(1)}{ax}$ sont bornées sur I . Comme de plus la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I , on obtient avec l'égalité ci-dessus que la fonction $x \mapsto K \frac{e^{ax}}{x}$ est bornée sur I comme combinaison linéaire de fonctions bornées sur I . Mais comme $a > 0$, l'expression $\frac{e^{ax}}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Dès lors, comme la fonction $x \mapsto K \frac{e^{ax}}{x}$ est bornée sur I , il s'ensuit que $K = 0$, et donc $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$K = 0 \text{ et } G = U(F) - \frac{g(1)}{a}.$$

- (v) Montrons alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente. Comme la fonction $U(F)$ est bornée sur I et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$ d'après la question précédente, la fonction G est bornée sur I . Dès lors, comme la fonction f est positive sur I par hypothèse, la fonction $g = U(f)$ est positive sur I d'après la question (1)(g)(ii). En particulier, comme $G' = g$ par construction, la fonction G est croissante sur I . Mais comme la fonction G est bornée (et donc majorée) sur I , il s'ensuit que G admet une limite finie en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'où l'on déduit que :

$$\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ converge.}$$

(c) *Cas général.*

Dans cette question, on désigne par f un élément de E tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente. Comme f appartient à E , la fonction f est continue et bornée sur I . Dès lors, la fonction $|f|$ est continue et bornée sur

I , et donc elle appartient à E . De plus, comme $|f|$ est positive sur I , on voit d'après la question précédente que l'intégrale $\int_1^{+\infty} U(|f|)(t)dt$ converge. Mais comme $|g| = |U(f)| \leq U(|f|)$ d'après la question (1)(g)(i), il s'ensuit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |g(t)|dt$ converge, et donc :

l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge absolument.