

Devoir Maison de Mathématiques n°6 :  
Diagonalisation - Algèbre bilinéaire

**Exercice 1.** Soient  $\alpha, p \in ]0, 1[$ , soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes telles que  $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$  et sachant  $[X = n], Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et posons  $G = 2Y - X$ . Compléter la fonction en Python suivante pour qu'elle affiche les valeurs prises par  $X, Y, G$  lors d'une expérience aléatoire.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(a,p):
    x=.....
    y=.....
    g=.....
    return .....
```

**Exercice 2.** Soit  $N$  une variable aléatoire et soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires, lesquelles sont toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que les variables aléatoires  $N, X_1, \dots, X_n, \dots$  sont (mutuellement) indépendantes, que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et que tous les  $X_i$  suivent la même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , et l'on pose  $S = \sum_{i=1}^N X_i$ , c'est-à-dire  $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés deux réels  $\lambda > 0$  et  $p \in ]0, 1[$ , calcule et affiche une simulation de la variable aléatoire  $S$ .

**Problème 1.** Dans ce problème, on désigne par  $p$  un entier  $\geq 3$ . Pour toute matrice carrée  $A$  de taille  $p$  et pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , on désigne par  $(A)_{i,j}$  le coefficient de  $A$  situé sur la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne. De même, pour toute matrice ligne  $L$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on désigne par  $(L)_j$  le coefficient de  $L$  situé sur la  $j$ -ème colonne. On dit qu'une suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  converge vers une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  si et seulement si :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, (A_n)_{i,j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (A)_{i,j}$ , ce que l'on note sous la forme :

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A.$$

De même, on dit qu'une suite  $(L_n)_{n \geq 1}$  de matrices de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  converge vers une matrice  $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$  si et seulement si :  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (L_n)_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (L)_j$ , ce que l'on note sous la forme :

$$L_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L.$$

Par la suite, on admet que, si  $(A_n)_{n \geq 1}$  et  $(B_n)_{n \geq 1}$  sont deux suites de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  convergeant respectivement vers les matrices  $A$  et  $B$ , alors la suite  $(A_n B_n)_{n \geq 1}$  de matrices converge vers  $AB$ . De même, on admet que, si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  qui converge vers la matrice  $A$  et si  $L$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ , alors la suite  $(L A_n)$  de matrices converge vers  $LA$ . Enfin, on désigne par  $\mathcal{ST}_p$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, (A)_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1.$$

**Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations**

(1) (a) Soit  $V$  la matrice colonne à  $p$  lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{ST}_p \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, (A)_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad AV = V.$$

(b) En déduire que toutes les matrices de  $\mathcal{ST}_p$  ont une valeur propre commune.

(c) Ecrire une fonction en Python qui détermine si une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est stochastique ou pas.

(2) Montrer que, pour tout  $(A, B) \in (\mathcal{ST}_p)^2$ , on a :  $AB \in \mathcal{ST}_p$ .

(3) Par la suite, on pose  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

(a) Justifier sans calcul que  $A_1$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et donner la dimension de  $E_1(A_1)$ .

- (b) En utilisant éventuellement les matrices  $A_2$  et  $A_3$  :
- (i) Montrer qu'il existe dans  $\mathcal{ST}_3$  au moins un élément non diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
  - (ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : " $\forall A \in \mathcal{ST}_p, \dim E_1(A) = 1$ ".
- (4) Soit  $A \in \mathcal{ST}_p$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$  et soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ , de coefficients  $x_1, \dots, x_p$ . On note  $i$  un élément de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  tel que :  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x_k| \leq |x_i|$ .
- (a) Montrer que :  $|\lambda x_i| \leq |x_i|$ .
  - (b) En déduire que :  $|\lambda| \leq 1$ .

### Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Dans cette partie, on désigne par  $A$  un élément de  $\mathcal{ST}_p$ , et l'on note  $A^0 = I_p$ .

- (1) (a) Etablir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $A^n \in \mathcal{ST}_p$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$ .

Dans la suite de la partie II, on suppose qu'il existe un entier  $r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ , une matrice  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  inversible, une matrice  $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonale dont tous les coefficients diagonaux  $(D)_{i,i}$  sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et distincts de 1 si  $i \geq r+1$ , tels que  $A = PDP^{-1}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \quad \text{et} \quad B_n = PM_nP^{-1}.$$

On désigne par  $\Delta$  la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonale dont tous les coefficients diagonaux  $(\Delta)_{i,i}$  sont égaux à 1 si  $i \leq r$  et nuls sinon, et l'on pose  $B = P\Delta P^{-1}$ .

- (2) Montrer que, pour tout réel  $x$  fixé tel que  $|x| \leq 1$ , on a :  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ .
- (3) Montrer que :  $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Delta$ . En déduire que :  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$ .
- (4) (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $B_n \in \mathcal{ST}_p$ .
- (b) En déduire que :  $B \in \mathcal{ST}_p$ .

### Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté  $T$  et de trois urnes numérotées 1, 2, 3. A chaque instant  $n \in \mathbb{N}$ , l'objet  $T$  se trouve dans l'une des trois urnes et une seule. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant  $n$ , et par  $L_n$  la matrice ligne :

$$L_n = (P([X_n = 1]) \quad P([X_n = 2]) \quad P([X_n = 3])).$$

On suppose connues la loi de  $X_0$  et la matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$  par :

$$(A)_{i,j} = P_{[X_0=i]}([X_1 = j]).$$

Enfin, on suppose que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = P_{[X_0=i]}([X_1 = j])$ .

- (1) Montrer que :  $A \in \mathcal{ST}_3$ .
- (2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n A$ . En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n$ .

Dans la suite de la partie III, on suppose que  $A = A_1$ , et l'on pose  $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

- (3) Déterminer une matrice  $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1 telle que  $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ , et calculer  $P_1^{-1}$ .
- (4) Déterminer la limite de la suite  $(D_1^n)_{n \geq 1}$ , puis la limite de la suite  $(A_1^n)_{n \geq 1}$ .
- (5) Déterminer la limite de la suite  $(L_n)_{n \geq 1}$ . Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

**Problème 2.** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $E = \mathbb{R}_n[x]$  et on désigne par  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ . De plus, pour tout  $P \in E$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\Phi(P)(x) = R''(x)$ , où  $R : x \mapsto (x^2 - 1)P(x)$ . Enfin, pour tous  $P, Q \in E$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2) P(t) Q(t) dt.$$

- (1) **Partie I : étude d'un endomorphisme de  $E$ .**

- (a) Montrer que, pour tout  $P \in E$ , le polynôme  $R''$  appartient à  $E$ .
- (b) Vérifier que  $\Phi(x \mapsto 1) = 2(x \mapsto 1)$  et  $\Phi(x \mapsto x) = 6(x \mapsto x)$ .
- (c) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (d) Calculer  $\Phi(x \mapsto x^k)$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , et écrire la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- (e) Montrer que  $\Phi$  admet  $n + 1$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ , avec  $\lambda_0 < \dots < \lambda_n$ .
- (f) L'endomorphisme  $\Phi$  est-il bijectif? Justifier.
- (g) Montrer que  $\Phi$  est diagonalisable et déterminer la dimension de  $E_{\lambda_k}(\Phi)$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ .
- (h) Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ , et soit  $P$  un vecteur propre de  $\Phi$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .
  - (i) Montrer que  $P$  est de degré  $k$ .
  - (ii) Montrer que  $Q : x \mapsto P(-x)$  est vecteur propre de  $\Phi$  pour la valeur propre  $\lambda_k$ .
  - (iii) En déduire qu'il existe une unique base  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $\Phi$  telle que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , le polynôme  $P_k$  est de degré  $k$ , unitaire et vérifie la relation  $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Que peut-on en déduire sur la parité de  $P_k$ ?
  - (iv) Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

**(2) Partie II : étude d'un produit scalaire sur  $E$ .**

- (a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- (b) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .
- (c) Montrer que la base  $(P_0, \dots, P_n)$  de la question (1)(h)(iii) est orthogonale.
- (d) Soit  $j$  un élément de  $\{1, \dots, n\}$ .
  - (i) Montrer que, pour tout polynôme  $S$  de degré  $< j$ , on a :  $\langle S, P_j \rangle = 0$ .
  - (ii) En considérant  $\langle x \mapsto 1, P_j \rangle$ , montrer que  $P_j$  ne garde pas un signe constant sur  $] - 1, 1[$ .
  - (iii) En déduire que  $P_j$  admet au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans  $] - 1, 1[$ .
- (e) Soit  $j$  un élément de  $\{1, \dots, n\}$ , soient  $x_1, \dots, x_m$  les racines d'ordre de multiplicité impair de  $P_j$  dans  $] - 1, 1[$  et soit  $S : x \mapsto (x - x_1) \dots (x - x_m)$ .
  - (i) Justifier que :  $m \leq j$ .
  - (ii) Montrer que le polynôme  $S_m P_j$  garde un signe constant sur  $] - 1, 1[$ .
  - (iii) En considérant  $\langle S_m, P_j \rangle$ , montrer que  $m = j$ .
  - (iv) En déduire que  $P_j$  admet  $j$  racines simples distinctes toutes situées dans  $] - 1, 1[$ .