TRAVAUX DIRIGÉS : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, justifier que U est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, puis déterminer s'il est borné :

$$(1)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y>0,\ x^2+y^2<1\}, \qquad (2)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x>0,\ y>0\},$$

$$(3)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x+y>0 \text{ ou } x^2+y^2<1\}, \quad (4)\ \ U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x+y+z>0\}.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, justifier que U est fermé dans $\mathbb{R}^n$, puis déterminer s'il est borné :

$$(1)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 2,\ x+1 \leq y\}, \qquad (2)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x-2y \geq 1 \text{ ou } x^2+y^2 \leq 1\},$$

$$(3)\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ e^x - e^y \geq 0,\ x^2 \leq 1,\ y \geq 0\}, \quad (4)\ \ U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ xyz \leq 0\}.$$

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathcal{D}_f$, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(x,y) = x^2+y^2+xy^3 \quad , \quad (2)\ f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(y) \quad , \quad (3)\ f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad ,$$

$$(4)\ f(x,y) = xe^y + ye^x - xye^{x+y} \quad , \quad (5)\ f(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad , \quad (6)\ f(x,y) = xye^{-x^2-y^2} \quad ,$$

$$(7)\ f(x,y) = \frac{xy}{x+y} \quad , \quad (8)\ f(x,y) = x^y \quad , \quad (9)\ f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad .$$

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathcal{D}_f$, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(x,y,z) = x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) \quad , \quad (2)\ f(x,y,z) = x\ln(y) + z\ln(x) \quad ,$$

$$(3)\ f(x,y,z) = xy+yz+zx-\arctan(xyz) \quad , \quad (4)\ f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) \quad ,$$

$$(5)\ f(x,y,z) = e^{x^2+xy+y^2+z^2} \quad , \quad (6)\ f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z} \quad .$$

Exercice 5. Tracer les lignes de niveau 0 et 1 de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x + x^2y$.

Exercice 6. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f en $(0,0)$ dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ \ f(x,y) = 1 + x - \sqrt{1+x-y}, \quad (2)\ \ f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos(x+y)}}, \quad (3)\ \ f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}.$$

Exercice 7. Calculer le DL à l'ordre 1 de $f : (x,y) \longmapsto \sin(y) + x\cos(y)$ au point $b = (\pi, \pi)$.

Exercice 8. Calculer le DL à l'ordre 1 de $f : (x,y,z) \longmapsto xy+yz+zx+xyz$ au point $b = (1,-1,-1)$.

Exercice 9. Calculer la matrice hessienne et le DL à l'ordre 2 de f en $(0,0)$ dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ \ f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y), \quad (2)\ \ f(x,y) = \frac{1}{1+x^2-y^2}, \quad (3)\ \ f(x,y) = e^{-x}\cos(y).$$

Exercice 10. Calculer la matrice hessienne et le DL à l'ordre 2 de f en $(0,0,0)$ dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ \ f(x,y,z) = \sin(x+y) + \ln(1+x+z), \quad (2)\ \ f(x,y,z) = \frac{1}{1+x-y+2z}.$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, si $\nabla(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors f est constante (*indication : étant donnés deux points $a, b \in \mathbb{R}^n$, étudier la fonction $g : t \longmapsto f(a+t(b-a))$*).

Exercice 12. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire tel que : $\forall (A,B) \in U^2$, $\forall t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in U$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On suppose qu'il existe une constante K telle que : $\forall x \in U$, $\|\nabla(f)(x)\| \leq K$. Montrer que, pour tous $a, b \in U$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq K\|b-a\|$ (*indication : pour tous points* $a, b \in U$, *étudier la fonction* $g : t \longmapsto f(a + t(b-a))$).

Exercice 13. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour toute application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $\Delta(f) = \partial^2_{1,1}(f) + ... + \partial^2_{n,n}(f)$. Montrer que, pour toutes applications $u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\Delta(uv) = \Delta(u)v + 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle + u\Delta(v).$$

Exercice 14. Soit f l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\|x\|^2}$.

(1) Justifier que l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
(3) Calculer le développement limité de f à l'ordre 1 au point $a = (1, ..., 1)$.
(4) Calculer les dérivées directionnelles première et seconde de la fonction f au point $a = (1, 0, ..., 0)$ dans la direction $u = (1, 1, ..., 1)$.

Exercice 15. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer son gradient et enfin déterminer ses points critiques, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$, (2) $f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$,

(3) $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^x$, (4) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, puis calculer son gradient et enfin déterminer ses points critiques, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + z^2}{1 + y^2}$, (2) $f(x,y,z) = xy + yz + zx - x - y - z$,

(3) $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$, (4) $f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la ligne de niveau 1 de f.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) La fonction f admet-elle un extremum global? Justifier.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la ligne de niveau 0 de f.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) Montrer que la fonction $f_1 : t \longmapsto f(t, 0)$ admet un minimum strict en 0.
(4) Etudier le signe de la fonction $f_2 : t \longmapsto f(t, 2t^2)$ sur $\mathbb{R}$.
(5) La fonction f admet-elle un extremum local? global? Justifier.

Exercice 19. Soit f l'application définie pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ par : $f(x) = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
(4) En déduire que f admet un minimum global que l'on déterminera.

Exercice 20. (ESCP 2013) Soit f l'application définie par : $f(x,y) = \dfrac{1}{1-y^2}\ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

(2) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $2yf(x,y) + (1-x^2)\partial_1(f)(x,y) - (1-y^2)\partial_2(f)(x,y) = 0$.

(3) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $y \in]0,1[$, on a : $\left|\ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln(y)|$.

(4) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy$ est convergente.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 21. Calculer la matrice hessienne et le DL à l'ordre 2 de f en a dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(x,y) = xy + e^x, \quad a = (0,0) \quad , \quad (2)\ f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \quad a = (1,1,1) \quad ,$$

$$(3)\ f(x,y) = e^{-x}\cos(y), \quad a = (0,\pi) \quad , \quad (4)\ f(x,y,z) = xy + yz + zx, \quad a = (1,2,3) \quad .$$

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^3$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer son gradient et sa hessienne.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) Calculer $f(t,0)$ et $f(0,t)$ pour tout $t > 0$. La fonction f admet-elle des extrema globaux? Justifier.
(4) Résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
(5) En déduire le tracé de la ligne de niveau 0 de l'application f.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ par $f(x_1,...,x_n) = x_1x_2^2...x_n^n$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
(2) Déterminer le gradient de f au point $a = (1,...,1)$.
(3) Calculer le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer son gradient.
(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
(3) La fonction f admet-elle des extrema globaux? Justifier.

Exercice 25. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = (x+y)^4 + (x-y)^4 - 2(x-y)^2$.

(1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Calculer son gradient et sa hessienne en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(3) Montrer que f admet trois points critiques que l'on déterminera.
(4) Calculer $f(x,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle un maximum global? Justifier.
(5) (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x,y) \geq -1$.
  (b) Calculer les valeurs de f aux points critiques. La fonction f admet-elle un minimum global? Justifier.

Exercice 26. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\|(x,y)\|$.
  (b) En déduire que f est continue en $(0,0)$.
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
(3) Déterminer l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(4) Calculer $f(t,t)$ et $f(t,-t)$ pour tout $t > 0$. La fonction f admet-elle des extrema globaux? Justifier.

Exercice 27. (Fonctions homogènes) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de degré α si, pour tout $t > 0$ et pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(tx_1,...,tx_n) = t^\alpha f(x_1,...,x_n).$$

(1) (a) Montrer que, si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles d'ordre 1 sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
  (b) Montrer que, si f est positivement homogène de degré α, alors on a pour tout $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \partial_k f(x_1,...,x_n) = \alpha f(x_1,...,x_n). \quad (*)$$

(2) Réciproquement, on suppose que f vérifie l'équation $(*)$ (*que l'on appelle l'équation d'Euler*). Pour tout $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_x : t \longmapsto f(tx_1,...,tx_n)$.
  (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\varphi_x'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi_x(t)$.
  (b) Calculer la dérivée de la fonction $g : t \longmapsto t^{-\alpha}\varphi_x(t)$.
  (c) En déduire que la fonction f est positivement homogène de degré α.

Exercice 28. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t(1+t)}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$.

(1) Déterminer le domaine de définition D de f.
(2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer deux réels a_x, b_x tels que, pour tout t vérifiant la condition $(x,t) \in D$:
$$\partial_1(f)(x,t) = \frac{a_x}{1+xt} + \frac{b_x}{1+t}.$$
(3) Préciser le domaine de définition Δ de F.
(4) On admet que $F'(x) = \int_0^1 \partial_1(f)(x,t)dt$ pour tout $x > -1$. Calculer $F'(x)$ pour tout $x > -1$.
(5) En déduire le sens de variation de F sur Δ, puis montrer que F' est continue en 1.
(6) A l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que $F'(x) \geq \frac{1}{1+x}$ pour tout $x > 1$.
(7) En déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice 29. (HEC 2012) On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle , \rangle$, et on dit qu'une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :
$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
(1) Question de cours : développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
(2) Soient f_1, f_2 deux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Les fonctions $f_1 + f_2$, αf_1, $\min(f_1, f_2)$, $\max(f_1, f_2)$ sont-elles convexes?
   (b) Si $n = 1$, a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe?
(3) Dans cette question, on suppose que f est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on considère l'application $g_{x,h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x+th)$.
   (a) Montrer que la fonction $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'_{x,h}$ en fonction des dérivées partielles de f.
   (c) En déduire que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a : $\langle \nabla(f)(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$.
   (d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global en a.
(4) Soit A une matrice symétrique (réelle) de taille n. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \frac{1}{2}\langle AX, X \rangle$, où X est le vecteur colonne de composantes $x_1, ..., x_n$. *On admet ici que toute matrice symétrique (réelle) est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et que $\nabla(f)(x) = AX$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire que, si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice 30. (ESCP 2017) Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :
$$g(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$
(1) On considère la fonction u définie sur Ω par : $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
   (b) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
   (c) Pour tout $(x,y) \in \Omega$, calculer le gradient $\nabla g(x,y)$ en fonction de f.

Si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit le laplacien $\Delta(h)$ de h au point (a,b) par : $\Delta(h)(a,b) = \partial^2_{1,1}h(a,b) + \partial^2_{2,2}h(a,b)$.

(2) On s'intéresse au laplacien de g sur Ω.
   (a) Calculer $\Delta(g)$ en fonction de f.
   (b) Montrer que $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$ si et seulement si la fonction f vérifie l'équation suivante :
$$\forall t > 0, \quad f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0$$
(3) On considère la fonction φ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par : $\varphi(t) = tf'(t)$.
   (a) Calculer la dérivée de φ.
   (b) Déterminer la forme des solutions g définies sur Ω comme dans le préambule et vérifiant l'équation $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$.
   (c) En déduire une solution g de l'équation $\Delta(g) = 0$ qui vaut 1 au point $a = (1,1)$ et qui s'annule sur le cercle unité $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'ensemble défini par :
$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$