ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2022

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Lundi 25 avril 2022 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 5 pages.

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. (a) En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k, $t_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k.

   (b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x, renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
function S = f(n,x)
    t = 1 // t = t_0(x)
    S = 1 // S = f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t * .....
        S = .....
    end
endfunction
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n.

3. (a) Soit x un réel positif.
   Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est croissante et déterminer sa limite.

   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(a) \leqslant u_n$.

   (b) Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Montrer que $\mathrm{e}^K \leqslant a$.

   (c) Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(a)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{d}t.$$

5. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée.

   On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |u_n| \leqslant M.$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leqslant \mathrm{e}^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) En déduire que

$$R_n(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e}^x = f_n(x) + R_n(x).$$

   (b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e}^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \mathrm{e}^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que :

$$\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

(c) Justifier que $\dfrac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

(d) En déduire finalement que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) On suppose que f est diagonalisable.
   En étudiant la trace de A, aboutir à une contradiction.
   Que peut-on en déduire sur f ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\Big((f + \mathrm{Id})^2\Big)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\Big((f + \mathrm{Id})^2\Big)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\Big((f + \mathrm{Id})^2\Big)$.

Pour simplifier les notations, on note dorénavant

$$F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \text{ et } G = \mathrm{Ker}\Big((f + \mathrm{Id})^2\Big).$$

4. Montrer que F et G sont stables par f.
5. On note $P = (X+1)^2(X-2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \dfrac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2$ et $\pi_2 = -\dfrac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.
7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$.
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ et que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7a et 8a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F. Identifier π_1.

On pose maintenant

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \text{ et } h = f - g.$$

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f.

13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Montrer que $h = (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2$.
    En déduire que $h^2 = 0$.
15. Conclure.

Problème

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \longmapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

Partie I

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   (a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
   (b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
   (c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.
   On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G.
2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X **suit la loi de Gumbel de paramètre** (μ, a), ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   Soit μ un réel et a un réel strictement positif.
   Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On **admet** que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), alors $Z = \dfrac{X - \mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. (a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function g = gumbel(mu,a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(\mu, a)$.
5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \dfrac{X - \mu}{a}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} \mathrm{d}u$ converge.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))\, \mathrm{d}t$ converge.
   On notera dans la suite :
   $$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\, \mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.
   On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.
   (d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ, μ et a.

On **admet** que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X notée σ^2 est égale à a^2c où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ.

6. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0,1)$.
   (a) Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-(e^{-x}+1)u}du$ converge et déterminer sa valeur.
   (c) À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ converge.
   (d) Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Partie II

Soient μ et a deux réels tels que $a > 0$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

et

$$C_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

7. Méthode des moments
   (a) Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires V et W, alors pour tous réels α et β, la suite de variables aléatoires $(\alpha V_n + \beta W_n)_{n\geqslant 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.
   (b) Montrer que les variables aléatoires M_n et C_n convergent en probabilité respectivement vers $E(X_1)$ et $E\big((X_1)^2\big)$.
   (c) Montrer que $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de a.
   (d) Montrer alors que $S_n = M_n - A_n\gamma$ est un estimateur convergent de μ.
8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script Scilab des valeurs approchées de γ et de c, dans des variables notées `gamma` et `c`.
   (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function A = estimateur_a(X)` renvoyant la valeur de l'estimateur A_n étudié précédemment, lorsque `X` est un vecteur-ligne de longueur n dont les coefficients sont des réalisations de $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
   (b) On a tracé sur la figure 1 l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur A_n, pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$.
   Commenter ce graphique.

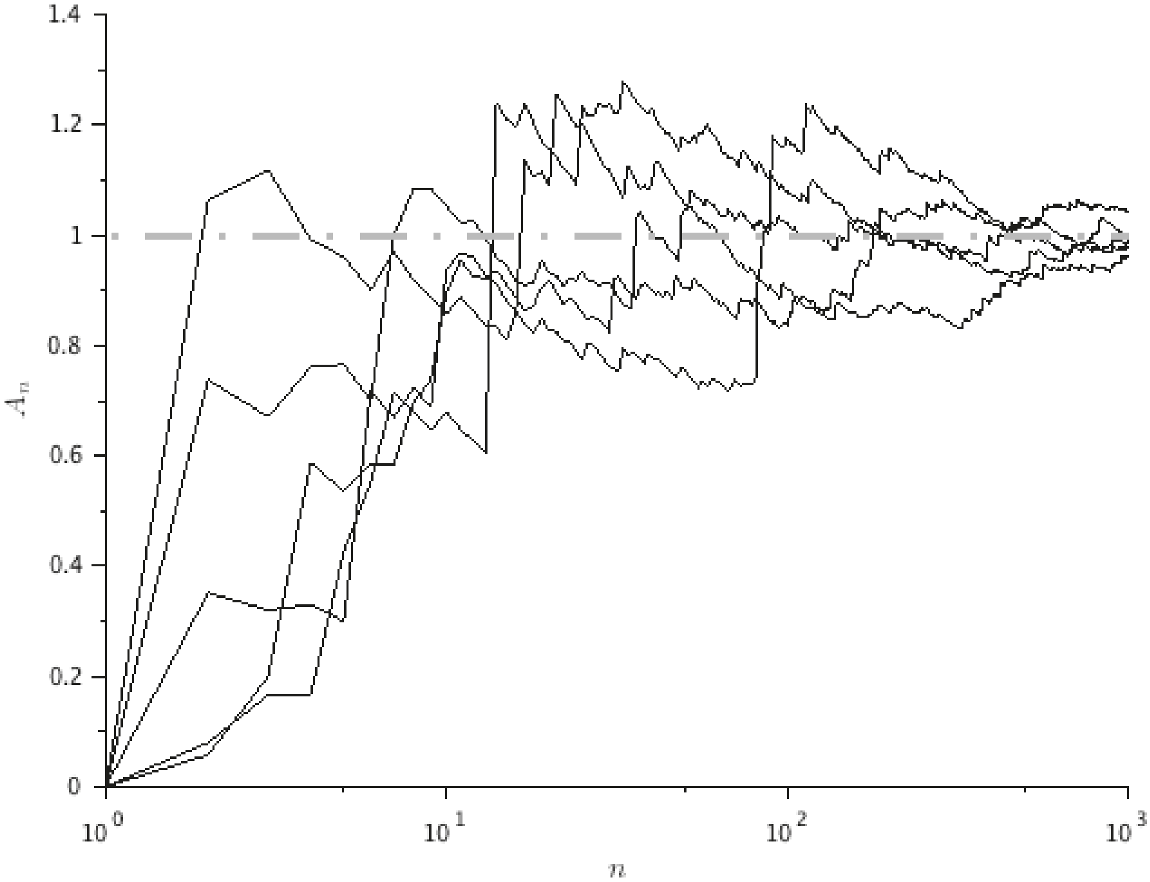

FIGURE 1 – Évolutions de A_n pour $\mu = 2$ et $a = 1$