Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC BS

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Jeudi 4 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la bibliothèque `numpy` de `Python` est importée avec `import numpy as np` et que la librairie `numpy.random` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Partie 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\text{rg}(M)=1$.
On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

2) a) Montrer qu'il existe une matrice $L=(1\ \ell_2\ \ldots\ \ell_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M=CL$.
   b) On rappelle que $\text{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M. Montrer que $\text{Tr}(M)=LC$.
   c) Établir que l'on a l'égalité :

$$M^2=\text{Tr}(M)M$$

Tournez la page S.V.P.

3) Montrer que $\mathrm{Tr}(M)$ est valeur propre de f.

4) On suppose $\mathrm{Tr}(M)=0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

5) On suppose $\mathrm{Tr}(M)\neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie 2

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que A n'est pas inversible.

6) a) En considérant le système $AX=0$, où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation : $ac=b$.

b) En déduire le rang de A.

7) a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x\geq 1 \\ 0 & \text{si } x<1 \end{cases}$.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=[1,+\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

4) On pose $Y=\ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler X.

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c. On pose $Y_1 = \ln X_1$, $Y_2 = \ln X_2$ et $Z = X_1 X_2$.

5) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulZ(c)` utilisant la fonction `simulX(c)` et permettant de simuler Z.

6) Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par :

$$V(Z) = \frac{c^2\left(2c^2 - 4c + 1\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7) a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2.

b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.

8) a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de K, puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} c^2 x \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z. Exprimer, pour tout réel, $F_Z(x)$ à l'aide de H. En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

9) a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6).

Exercice 3

On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note F_k l'événement « obtenir "face" au k^{e} lancer » et on pose $P_k = \overline{F_k}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1) a) Utiliser les événements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R, définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $R(\Omega) = \{0,1,2\}$.

Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.

a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'événement $(Q = k)$ à l'aide de la variable X.

b) En déduire que Q suit la loi $BN(1 - q^3)$.

3) Montrer que $P(R=0)=\dfrac{1}{1+q+q^2}$, $P(R=1)=\dfrac{q}{1+q+q^2}$ et $P(R=2)=\dfrac{q^2}{1+q+q^2}$.

4) Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.

5) Simulation des variables X, Q et R.

a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
    X=rd.geometric(p)-1
    return X
```

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q=------
    R=------
    return(X,Q,R)
```

Problème

Rappel de quelques formules trigonométriques utiles dans ce problème :

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$.

$\cos(2a)=1-2\sin^2 a$.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers (positifs ou négatifs) et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que l'ensemble E des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles (somme de deux applications et produit d'une application par un réel) est un espace vectoriel.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $I_n=[\![0,n-1]\!]$.
On rappelle qu'une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est dite n-périodique (ou de période n) si :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ f(k+n)=f(k)$$

On note F_n l'ensemble des applications n-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit h l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall k\in\mathbb{Z}$, $h(k)=\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. Vérifier que h est élément de F_n.

2) Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit k un entier quelconque.
On admet qu'il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}\times I_n$ tel que $k=nq+r$.
Montrer alors que, pour toute fonction f de F_n, on a l'égalité :

$$f(k)=f(r)$$

4) Pour tout i de I_n, on considère la fonction n-périodique e_i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ (e_i est donc élément de F_n) dont la restriction à I_n est donnée par : $\forall k \in I_n$, $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Utiliser la question 3) pour montrer que, pour tout élément f de F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$$

b) En déduire que la famille $B_n = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de F_n.

c) Quelles sont les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n ?

5) Pour tout couple (f, g) de $F_n^{\ 2}$, on pose : $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)$.

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F_n. On note $\|\ \|$ la norme associée.

b) Montrer que la base B_n est orthonormale pour ce produit scalaire.

c) On admet que, pour tout couple (a, b) de réels, avec $b \in]0, 2\pi[$, et pour tout entier k, on a :

$$2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

Montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

d) En déduire les égalités $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$.

e) Déterminer la norme $\|h\|$ de l'application h présentée à la question 1).

6) On considère l'application notée D qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $D(f)$, que l'on pourra noter Df s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Df(k) = f(k+1) - f(k)$$

a) Vérifier que, pour tout f de F_n, Df est élément de F_n.

b) Montrer que l'application $D : f \mapsto D(f)$ est un endomorphisme de F_n.

c) Vérifier que l'application Dh est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

d) En déduire, à l'aide de la deuxième des égalités de la question 5d), que :

$$\|Dh\| = \sqrt{2n}\ \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

7) On considère l'application notée Δ qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $\Delta(f)$, que l'on pourra noter Δf s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$$

On admet que Δ est un endomorphisme de F_n.

a) Montrer que : $\forall (f, g) \in F_n^{\ 2}$, $\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle$.

b) En déduire que Δ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien F_n.

c) Montrer que les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles.

8) On note ε_0 l'application constante de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ égale à 1.

a) Vérifier que $\varepsilon_0 \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.

b) Montrer alors que $\operatorname{Ker}(\Delta) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_0)$.

9) On pose $c = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(\Delta) \setminus \{0\}\}$, où $\operatorname{Sp}(\Delta)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de Δ.
On considère un élément f de F_n tel que $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormale de F_n, formée de vecteurs propres de Δ, de la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right)$, puis montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$.

b) Montrer enfin que : $\|Df\|^2 \geq c\|f\|^2$.

10) Dans cette question, on prend $n = 3$ et on note A la matrice de Δ dans la base B_3 de F_3.

a) Vérifier que la première colonne de A est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On admet, pour la suite, que l'on a :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
En déduire les valeurs propres de Δ.
Comment s'écrit l'inégalité obtenue à la question 9b) dans ce cas ?

c) Que peut-on déduire du cas de l'application h ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1109 – D'après documents fournis