PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : ALGÈBRE

1. Espaces vectoriels - Applications linéaires

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire.

(1) Pour tout $u \in E$, on note ϕ_u l'application qui à tout vecteur x de E associe $\phi_u(x) = \langle u, x\rangle$.
  (a) Montrer que ϕ_u est une forme linéaire.
  (b) Montrer que l'application Ψ qui, à tout vecteur u de E, associe l'application ϕ_u est injective.
  (c) En déduire que, pour toute forme linéaire ϕ, il existe un unique vecteur u de E tel que $\phi = \phi_u$.

Dans toute la suite, n désigne un entier ≥ 2. Pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la trace de A est notée $\mathrm{tr}(A)$. *On admet* que l'application g définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $g(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute la suite, H désigne un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a:
$$M \in H \iff \mathrm{tr}(AM) = 0.$$
(3) Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose :
$$B = E_{1,n} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1}.$$
Montrer que la matrice B est inversible.

(4) On note f l'application linéaire canoniquement associée à A et on pose pour tout entier $r \in [\![1, n]\!]$:
$$J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}.$$
  (a) Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $r > 0$ tels que $\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = J_r$.
  (b) En déduire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$.

(5) Montrer que H contient une matrice inversible.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 2$ et soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, où 0 désigne l'endomorphisme nul. Un tel endomorphisme u est dit *nilpotent*.

(1) (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a: $u(\ker(u^k)) \subset \ker(u^{k-1})$.
  (b) Montrer que l'on a :
$$\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \cdots \subset \ker(u^p) = E.$$
  Prouver que toutes ces inclusions sont strictes.
  (c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(u)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker(u^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, une base $\mathcal{B}_k$ de $\ker(u^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\ker(u^{k+1})$. On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E. Ecrire la matrice représentative M de u dans la base $\mathcal{B}_p$. Préciser sa diagonale.

(2) On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$. On note tr l'application trace.
  (a) L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel ?
  (b) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\ker(\mathrm{tr})$.
  (c) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \ker(\mathrm{tr})$.

(3) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se situe à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :
$$N_k = E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}.$$
  (a) Montrer que la famille $\{(N_k)_{2\leq k\leq n}, (E_{i,j})_{i\neq j}\}$ est libre.
  (b) En déduire l'égalité: $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \ker(\mathrm{tr})$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soient a et b deux réels distincts. On note Id_E l'application identité de E. Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant la relation :
$$f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = 0 \quad (*)$$

(1) Quelles sont les homothéties vérifiant la relation $(*)$?

(2) (a) Déterminer une condition suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.
(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit un projecteur sans être une homothétie.

On suppose désormais que f n'est pas une homothétie.

(3) (a) Déterminer deux réels λ et μ tels que : $f = \lambda(f - a\mathrm{Id}_E) + \mu(f - b\mathrm{Id}_E)$.
(b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = bp + aq$ et $q \circ p = p \circ q = 0$.

(4) On suppose désormais que a et b sont non nuls. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$f^n = b^n p + a^n q \quad (**)$$
Pour tout entier $n > 0$, si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$. La relation $(**)$ est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 4. Soient n, m deux entiers tels que $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Le rang d'un endomorphisme f de E est noté $\mathrm{rg}(f)$ et Id_E désigne l'endomorphisme identité de E. Enfin, on note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

(1) Soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement au sous-espace $G_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} F_j$.
(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = n$.
(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$.
(c) Montrer que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a: $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(2) Dans cette question, soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que:
$$q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + \cdots + \mathrm{rg}(q_k) \leq n.$$
(a) Montrer que $E = \mathfrak{Im}(q_1) \oplus \mathfrak{Im}(q_2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Im}(q_k)$.
(b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(c) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, q_i est le projecteur sur $\mathfrak{Im}(q_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathfrak{Im}(q_j)$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$ et soit u un endomorphisme de E.

(1) On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que, si $u \neq 0$, alors u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$.

On rappelle (ou on admet) que la trace de la matrice d'un endomorphisme u est indépendante de la base dans laquelle l'endomorphisme est écrit. On la note $\mathrm{tr}(u)$. Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme non nul de E, de trace nulle.

(2) Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre, puis un sous-espace F de E, supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x_0)$ dans E et contenant $u(x_0)$.

On note p la projection de E sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x_0)$.

(3) (a) Montrer que F est stable par $p \circ u$ et que l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F est de trace nulle.
(b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses éléments diagonaux nuls.
(c) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

2. Diagonalisation

Exercice 6. Soit n un entier ≥ 2 et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée. Soit T l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad T(M) = AM.$$

(1) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que T est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.
(3) Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $M_{i,j} = X_i {}^t X_j$. Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T.
(4) Dans cette question, on suppose que A admet au moins une valeur propre μ et donc un vecteur propre X associé. On suppose que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T.
   (a) Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = MX$. Montrer que Φ est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 7. Soit n un entier $n \geq 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose :

$$\Gamma_k = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, A^k M = A^{k-1} M \right\}.$$

(1) Montrer que l'ensemble Γ_k est un espace vectoriel.
(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.
(3) Dans cette question *uniquement*, on prend $n = 3$ et on choisit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer Γ_1, Γ_2 et Γ_3.
(4) On revient au cas général où $n \geq 2$.
   (a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
   (b) Étudier la réciproque (*indication : On pourra s'intéresser à une matrice M dont toutes les colonnes valent X, où $X \in \ker A$*).
(5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \dim \Gamma_k$. Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que :

$$\forall k < p,\ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p,\ u_k = u_p.$$

(6) Montrer que, si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre, alors $p = 2$.

Exercice 8. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{p+3} = 4u_{p+2} - 5u_{p+1} + 2u_p$.

(1) (a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 3.
   (b) Vérifier que la suite $(p)_{p \in \mathbb{N}}$ appartient à E.
   (c) Déterminer les suites géométriques appartenant à E.
   (d) En déduire l'expression des suites appartenant à E.
(2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que 1 et 2 sont valeurs propres de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable?
   (c) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (d) En déduire que le polynôme $P : x \longmapsto (x-1)^2(x-2)$ est annulateur de A.
(3) (a) Soit A la matrice de la question précédente. Justifier que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_p, b_p, c_p) \in \mathbb{R}^3, \quad A^p = a_p A2 + b_p A + c_p I_3.$$

   (b) Montrer que la suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ appartient à E.
   (c) Expliciter A^p en fonction de A^2, A, I_3.

(d) La matrice A est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse en fonction de A^2, A, I_3.

Exercice 9. Soit n un entier ≥ 3. On considère les matrices $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = i + j \quad \text{et} \quad b_{i,j} = i.$$

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. On note $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$ leurs rangs respectifs. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

(2) (a) Déterminer une relation entre A, B et ${}^tB$.
  (b) En déduire le rang de A.
  (c) En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
  (d) Justifier que la matrice A est diagonalisable, et exprimer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction des valeurs propres de A.

(3) (a) Exprimer $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de $\mathrm{tr}(B^2)$ et $\mathrm{tr}({}^tBB)$.
  (b) En déduire $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de n.
  (c) Déterminer toutes les valeurs propres de A.

Exercice 10. On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

(1) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt$ existe.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt$.

(2) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' en fonction de g et f.

(3) Soit Φ l'application définie sur E par : $\forall f \in E$, $\Phi(f) = g$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, où $f_k : x \longmapsto e^{-kx}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
  (a) Montrer que la dimension de F_n est égale à $n+1$.
  (b) Montrer que la restriction de Φ à F_n induit un endomorphisme de F_n qu'on notera Φ_n.
  (c) L'endomorphisme Φ_n est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

(4) Soit h la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

  (a) Montrer que h appartient à E.
  (b) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.
  (c) En déduire la dimension de chaque sous-espace propre de Φ_n.

Exercice 11. Soit n un entier ≥ 2 et posons $E = \mathbb{R}_n[x]$.

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$ converge pour tout $P \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose alors $T(P) : x \longmapsto e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.

(2) Montrer que l'application $T : P \longmapsto T(P)$ est linéaire.

(3) Déterminer le noyau de T.

(4) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $e_k : x \longmapsto x^k$.
  (a) Calculer $T(e_0)$.
  (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a : $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.
  (c) En déduire que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a : $T(e_k) - e_k \in \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_{k-1})$.
  (d) En déduire que T est un endomorphisme de E.

(5) Montrer que $(I-T)^{n+1} = 0$, où I désigne l'identité de E.

(6) Déterminer les valeurs propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable?

(7) En déduire une expression de T^{-1} comme polynôme en T.

3. Algèbre bilinéaire

Exercice 12. Soient A et B deux matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels. On note $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ (resp. $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$) une matrice diagonale semblable à A (resp. à B) avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \geq \mu_2$).

(1) Justifier que $A + B$ est diagonalisable.

(2) On note $D = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2)$ une matrice diagonale semblable à $A + B$, avec $\nu_1 \geq \nu_2$.
  (a) Montrer que la trace d'une matrice symétrique d'ordre 2 est la somme de ses valeurs propres.
  (b) En déduire l'égalité :
$$\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2.$$
(3) (a) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a :
$$\lambda_2\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_1||x||^2.$$
  (b) En déduire l'inégalité :
$$\nu_1 - \nu_2 \leq \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2.$$
(4) Établir l'inégalité :
$$|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leq \nu_1 - \nu_2.$$
(5) Montrer que l'ensemble des couples possibles (ν_1, ν_2) est inclus dans un segment $[a, b]$ dont on déterminera les extrémités.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(1) Montrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente.
(2) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
(3) (a) A l'aide du changement de variable $\phi(u) = \cos(u)$ sur un intervalle à préciser, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
  (b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$. On note T_0 le polynôme constant égal à 1.
(4) (a) Déterminer un réel α pour lequel le polynôme $T_1 : x \longmapsto x - \alpha T_0$ vérifie les relations $\langle T_1, T_0\rangle = 0$ et $\mathrm{Vect}(T_1, T_0) = \mathbb{R}_1[x]$. Préciser les racines de T_1.
  (b) Déterminer deux réels λ et μ pour lesquels le polynôme $T_2 : x \longmapsto x^2 - \lambda T_1 - \mu T_0$ vérifie les relations $\langle T_2, T_0\rangle = \langle T_2, T_1\rangle = 0$ et $\mathrm{Vect}(T_2, T_1, T_0) = \mathbb{R}_2[x]$. Préciser les racines de T_2.
(5) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On suppose que P change de signe sur $\mathbb{R}$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$) les racines de P telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme P change de signe au voisinage de α_i. Déterminer le signe du polynôme :
$$P : x \longmapsto \prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i).$$
(6) Soit $(T_0, \ldots, T_n)$ une base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire défini à la question (1), telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme T_k soit de degré k. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le polynôme T_k possède k racines simples et que ces racines appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 14. Soit n un entier ≥ 2. On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$, que l'on munit du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de A est noté $\mathrm{Sp}(A)$. On dit que A est une *contraction* (resp. une contraction stricte) si $\|Ax\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\|Ax\| < \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). *Dans toute la suite, on note P (resp. Q) une matrice associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, à un projecteur orthogonal p (resp. q).*

(1) Dans cette question, on suppose que les matrices P et Q commutent.
  (a) On pose $T = P - Q$. Justifier que T est une matrice symétrique.
  (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ et soit x un vecteur propre associé à λ. Montrer que, si $Px = 0$, alors $\lambda \in \{-1, 0\}$. Prouver aussi que, si $Px \neq 0$, alors Px est un vecteur propre de Q. En déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \{-1, 0, 1\}$.
  (c) Montrer que T est une contraction.
  (d) Prouver que, si T est une contraction stricte, alors on a nécessairement $P = Q$.
(2) Dans cette question, on ne suppose plus que P et Q commutent. L'objectif de cette question est de montrer que $T = P - Q$ est encore une contraction.
  (a) Etablir la relation suivante :
$$\|Tx\|^2 = \langle (I - Q)x, Px\rangle + \langle (I - P)x, Qx\rangle\,.$$
  (b) Montrer que T est une contraction. En déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1, 1]$.

Exercice 15. Soit n un entier ≥ 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $||\ ||$. On identifie tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(1) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de A associés respectivement à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On suppose désormais que $\lambda_1 > 0$.

(2) La matrice A est-elle inversible ?
(3) Montrer que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $\langle Au, u\rangle \geq \lambda_1 ||u||^2$.
(4) En déduire que l'application $\phi : (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \langle Au, v\rangle$ est un produit scalaire.
(5) Soit b un vecteur non nul fixé dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ par:

$$f : u \longmapsto \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle.$$

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(u) \geq \frac{1}{2}\lambda_1 ||u||^2 - ||b||.||u||.$$

En déduire que la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^n$. Est-elle majorée sur $\mathbb{R}^n$?
(b) Montrer que l'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ admet une borne inférieure négative ou nulle.
(c) Montrer que, si $||u|| > \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$ alors $f(u) \geq 0$. En déduire que :

$$\inf\{f(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{f(B_r)\},$$

où B_r est la boule fermée centrée en (0 et de rayon $r = \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$.
(d) Montrer que la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et par $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

(1) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathfrak{Im}\,(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad y = \frac{1}{k}(u^k(x) - x),$$

où $u^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ \dots \circ u$ (composé k fois).
(2) En déduire que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathfrak{Im}\,(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.
(3) Conclure que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathfrak{Im}\,(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

Par la suite, on dit qu'une suite $(z_N)_N$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ converge vers $z \in \mathbb{R}^n$ (que l'on note $\lim\limits_{N\to+\infty} z_N = z$) si $\lim\limits_{N\to+\infty} \|z_N - z\| = 0$.

(4) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$.
(5) Soit $y \in \mathfrak{Im}\,(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$.
(6) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = p(y),$$

où p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

Exercice 17. Soit p un entier ≥ 2. On considère l'espace $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|.\|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de E. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont toutes réelles positives.

Par la suite, on note c la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$.

(2) (a) Montrer que pour tout $X \in E$, on a $||AX||^2 \leq c||X||^2$.
(b) Etablir, pour tout couple (X, Y) de vecteurs de E et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante :

$$|\langle A^k X, Y\rangle| \leq c^{\frac{k}{2}} \|X\| \times \|Y\|.$$

(3) On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers une matrice U si chacun des coefficients de U_n converge vers le coefficient de U correspondant.
(a) Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}$.
(b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Montrer que la suite (B_n) converge vers une matrice notée C.
(c) Exprimer les valeurs propres de C en fonction des valeurs propres de A.

Exercice 18. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $s = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\ker f)^{\perp}$.
(2) (a) Vérifier que $P(X) = X^3 + sX$ est un polynôme annulateur de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
(3) On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $C = A^2 + sI_3$.
(a) Déterminer $\ker(g)$ et $\mathfrak{Im}(g)$.
(b) Dans cette question uniquement, on suppose que $s = 1$. Quelle est la nature de g?
(c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $B = A + \lambda I_3$ est-elle inversible? Dans ce cas, expliciter la matrice inverse B^{-1} de B comme un polynôme en A.