PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : ANALYSE

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}dt$.

(1) (a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.
(b) A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, calculer a_0.

(2) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.
(b) Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$. Montrer que la suite (w_n) est constante et calculer cette constante.
(c) Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.
(d) Etablir l'existence d'un réel $K > 0$ que l'on calculera, tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^{3/2}}$.
(e) En déduire la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n a_n$.

(3) (a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$.
(b) En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$. Quelle est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$?

Exercice 2. Soit f une fonction continue et positive sur $I = [0,1]$ telle que $\gamma = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt < 1$. On considère une fonction u_0 continue sur I telle que, pour tout $x \in I$:

$$u_0(x) \leq 1 + \int_0^x u_0(t)f(t)dt.$$

On définit par récurrence la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$:

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t)f(t)dt.$$

(1) Soit $x \in I$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(u_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante.

(2) (a) Justifier que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $x \longmapsto u_n(x)$ est continue sur I. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $M_n = \max\{|u_n(x)|,\ x \in I\}$ est bien défini.
(b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $M_{n+1} \leq 1 + \gamma M_n$. Pour tout $n \geq 1$, majorer M_n en fonction de M_0 et de γ. En déduire que la suite (M_n) est bornée.
(c) Justifier que, pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. On note $u(x)$ sa limite.

(3) (a) Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$:

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq M \int_x^y f(t)dt.$$

En déduire que la fonction u est continue sur I.
(b) Pour tout $n \geq 1$, montrer que la fonction $x \longmapsto v_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est dérivable et croissante sur I.
(c) Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \gamma\left(u_n(x) - u_{n-1}(x)\right).$$

(d) En déduire, pour tout $x \in I$ et tout entier $p \geq 1$, l'encadrement suivant:

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq \gamma^n (1-\gamma)^{-1}\left(u_1(x) - u_0(x)\right).$$

(e) Soit $x \in I$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^x u_n(t)f(t)dt\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\displaystyle\int_0^x u(t)f(t)dt$.
(f) En déduire que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 3. Soit (a_n) la suite de premier terme $a_0 > 0$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

(1) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x.

(2) (a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et à termes positifs.
(b) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
(c) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.

(3) *On admet* que, si (x_n) est une suite réelle qui converge vers ℓ, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$ converge aussi vers ℓ. Déterminer un équivalent de a_n de la forme $\dfrac{\lambda}{n}$ quand n tend vers $+\infty$, où λ est un réel à préciser.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction g définie par $g(t) = -\ln(1-t)$ entre les points 0 et $x > 0$. En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = g(x).$$

(5) Pour tout $x \in]0,1[$, établir la convergence de la série $\sum a_n x^n$.

(6) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n - \frac{2}{n}\right)x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| - \frac{\varepsilon}{2}\ln(1-x).$$

En déduire un équivalent de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Exercice 4. Dans tout l'exercice, α est un réel > 0. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $I(\alpha, x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-xt^{\alpha}\right)dt$ converge.
(b) A l'aide du changement de variable $u = xt^{\alpha}$ dont on justifiera la validité, montrer que :

$$I(\alpha, x) = Cx^{-1/\alpha},$$

où C est une constante > 0 que l'on déterminera en fonction de α.

(2) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série de terme général $\exp(-xn^{\alpha})$ est convergente. On pose alors pour tout $x > 0$:

$$S_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-xn^{\alpha}).$$

(b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} S_{\alpha}(x)$.

(3) (a) Etablir pour tout $x > 0$ l'encadrement : $S_{\alpha}(x) - 1 \leq I(\alpha, x) \leq S_{\alpha}(x)$.
(b) Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $S_{\alpha}(x) \underset{x\to 0}{\sim} I(\alpha, x)$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}dx$.

(1) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'intégrale I_n converge.
(b) Trouver, pour tout $n \geq 2$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer I_{2n} et I_{2n+1}.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}\exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)dx.$$

(3) (a) Etablir la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}}I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)\exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)dx.$$

(b) En déduire l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < \sqrt{n}I_n < I_{n+1}$.

(4) Etablir les inégalités suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} < 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n} < 1.$$

(5) En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$.

(1) Montrer que, pour tout x réel, les intégrales $C(x)$ et $S(x)$ convergent.
(2) (a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que, pour tous réels u et h, on a:
$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}.$$
(c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $S'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.
(4) (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g : x \longmapsto e^{x^2/4}f(x)$.
(b) En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.
(c) On suppose qu'il existe une fonction A de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$S(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4}dt.$$
(5) Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on définit la norme infinie de f sur $[0,1]$ par :
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

(1) Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = F$ avec $F' = f$ et $\int_0^1 F(t)dt = 0$.
(a) Montrer que φ est bien définie.
(b) Justifier que φ est un endomorphisme de E.
(2) (a) Justifier que l'ensemble :
$$A = \left\{ \frac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty},\ f \in E \setminus \{0\} \right\}$$
est non vide et majoré. On note M sa borne supérieure.
(b) Soit $f \in E$, $F = \varphi(f)$ et G la primitive de F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Pour tout $x \in [0,1]$, exprimer $G(0)$ et $G(1)$ en fonction de $G(x), G'(x), G''(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$:
$$|F(x)| \leq \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2}\right] \|f\|_\infty.$$
(c) Déterminer la constante M.
(3) On définit une suite de fonctions de E par $P_0 : x \longmapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_{n+1} = \varphi(P_n)$.
(a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.
(b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n$ converge pour tout réel t tel que $|t| < 2$.

Exercice 8. Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(f)$ par :
$$B_n(f) : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

(1) Soit $x \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_n$, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x, et l'on pose :
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
(a) Exprimer $E(\overline{X}_n)$, $V(\overline{X}_n)$ et $E(f(\overline{X}_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n(f)$.
(b) En déduire l'encadrement suivant :
$$\sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sqrt{V(\overline{X}_n)} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(2) Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $\lambda \geq 0$, on a : $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$.
   (b) Pour tous $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, établir l'inégalité :
$$\left|x - \frac{k}{n}\right|^\alpha \leq n^{-\frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right).$$
(3) On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ et $K > 0$ tels que :
$$\forall (y,z) \in [0,1]^2, \quad |f(y) - f(z)| \leq K|y-z|^\alpha.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \dfrac{3K}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x \longmapsto xe^{-x}$. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose :
$$F(x,y) = f(x) + f(y) - f(x+y).$$
(1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et exprimer, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, les dérivées partielles premières de F en fonction de $f'(x), f'(y), f'(x+y)$.
(2) Etablir que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $f'(x) = f'(a)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet au plus une solution distincte de a.
(3) En déduire que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, (x,y) est un point critique de F si et seulement si $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$.
(4) Montrer que F admet un unique point critique, noté (α, α), et montrer que $1 < \alpha < 2$.
(5) Etablir que $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.
(6) Montrer que F admet un extremum local. Déterminer la nature de cet extremum local.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend n valeurs réelles distinctes $z_1, ..., z_n$ avec des probabilités respectives $p_1, ..., p_n > 0$, on définit l'entropie de Z par :
$$H(Z) = -\sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k).$$
Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in]0,1[^n$, on pose : $h_n(x) = h_n(x_1, ..., x_n) = -\sum\limits_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$.
(1) Calculer l'entropie d'une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur un ensemble $\{u_1, ..., u_n\}$.
(2) Justifier que la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,1[^n$ et calculer son gradient et sa hessienne en tout point x de $]0,1[^n$.
(3) Montrer que la fonction h_n admet un unique point critique noté x^* sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + ... + x_n = 1$ que l'on déterminera.
(4) Fixons $x \in]0,1[^n$ tel que $x_1 + ... + x_n = 1$ et notons $u = x - x^*$.
   (a) Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $x^* + tu \in]0,1[^n$.
   Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $\psi(t) = h_n(x^* + tu)$.
   (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre 0 et 1, montrer que h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + ... + x_n = 1$. Ce maximum est-il atteint en d'autres points que x^*? Justifier.
(5) Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs avec des probabilités non nulles, quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie?