

PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : PROBABILITÉS

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i , et soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X.$$

- (1) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$.
- (2) On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- (3) On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y = \ell) \neq 0$.
 - (a) a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(k+1)P(X = k+1)P(Y = \ell)(1-p) = (\ell+1)P(X = k)P(Y = \ell+1)p.$$

- (b) En déduire la loi suivie par X , puis celle suivie par Y .
- (c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 2. Soit n un entier ≥ 2 . Soit $p_n \in]0, 1[$ et soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points distincts du plan. On construit une figure géométrique aléatoire admettant ces points pour sommets de la façon suivante. Pour i différent de j , on dessine une arête entre les points A_i et A_j avec la probabilité p_n , et on ne dessine pas d'arête reliant A_i et A_j avec la probabilité $1 - p_n$. L'objet de cet exercice est d'évaluer la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé, c'est-à-dire un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet par une arête. Pour ce faire, on définit des variables aléatoires X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (1) Déterminer la loi de X_1 . En déduire l'espérance de S_n .
- (2) En déduire un majorant de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p_n = c \frac{\ln n}{n}$ avec $c > 0$.

- (3) Dans cette question, on suppose que $c > 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0) = 1$.
- (4) Dans cette question, on suppose que $c < 1$.
 - (a) Montrer que, pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$P(Y = 0) \leq \frac{V(Y)}{(E(Y))^2}.$$

- (b) Calculer $E(X_i X_j)$ pour $i \neq j$, puis $E(S_n^2)$.
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$.

Exercice 3. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi

géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et l'on pose $q = 1 - p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On considère également une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, possédant une espérance et indépendante des variables aléatoires X_n . Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

et on admet que $S = \sum_{i=1}^N X_i$ est une variable aléatoire. Enfin, on rappelle la formule suivante, que l'on pourra utiliser sans justification. Pour tous entiers naturels r et s tels que $r \leq s$, on a :

$$\sum_{j=r}^s \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1}.$$

- (1) Déterminer $S_n(\Omega)$. Montrer que l'on a :

$$\forall k \in S_n(\Omega), \quad P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

- (2) Compléter la fonction en Python suivante pour qu'étant donnée une valeur de p , elle retourne une simulation de la variable S_3 :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(p):
    x=.....
    return x
```

- (3) Vérifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance conditionnelle $E(S | [N = k])$ et donner sa valeur.
 (4) En déduire la valeur de $E(S)$.
 (5) On suppose dans cette question que N suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de S .

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et on suppose que :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \begin{cases} P(X = m) &= \alpha m q^{m-1} \\ P_{[X=m]}(Y = n) &= \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif que l'on déterminera par la suite.

- (1) (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) en fonction de α et q .
 (b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y . Trouver la valeur de α et reconnaître cette loi.
 (2) Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $P_{[Y=n]}(X = m)$.
 (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $B_n = [Y = n]$.
 (a) Justifier l'existence de l'espérance conditionnelle $E(X|B_n)$ et la calculer. En déduire l'existence de l'espérance de X et la déterminer.
 (b) On considère la variable aléatoire $Z = X + XY$. Montrer que l'espérance conditionnelle $E(Z|B_n)$ existe et la calculer. En déduire que Z admet une espérance et déterminer $E(Z)$.

Exercice 5. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour toute variable aléatoire X , on désigne par φ_X l'application définie pour tout réel t tel que la série $\sum_{n \geq 0} P([X = n])t^n$ converge par :

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])t^n.$$

- (1) Montrer que φ_X est définie au moins sur le segment $[-1, 1]$.
 (2) Dans cette question, on suppose que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Calculer φ_X et déterminer son domaine de définition I .

- (3) Montrer que φ_X admet un développement limité en 0 à tout ordre et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n P([X = k])t^k + o(t^n).$$

- (4) Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y telle que $\varphi_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.
 (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n de $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
 (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre n de φ_Y .
 (c) Déterminer la loi de Y .
 (5) On suppose maintenant que les variables aléatoires X et Y définies dans les questions précédentes sont indépendantes. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 6. Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (1) Calculer les moments centrés d'ordre $k \geq 1$ de chaque variable aléatoire X_i , puis l'espérance et la variance de S_n .
 (2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.

Dans la suite, on pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}.$$

- (3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.
 (4) Montrer que $\mathcal{Z}_n$ appartient à $\mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.
 (5) Soit $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{Z}_n$. Montrer que $P(\mathcal{Z}) = 0$ et que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

2. VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Exercice 7. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

- (1) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T .
 (b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T .
 (2) On considère une variable aléatoire N , indépendante des X_k , qui suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$, avec $0 < q < 1$. On définit la variable aléatoire U par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)).$$

- (a) Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$P(U > x) = \frac{1 - q^2}{x^2 - q^2}.$$

- (b) Etablir l'existence de l'espérance de la variable aléatoire U .

(c) Etablir l'égalité suivante :

$$E(U) = 1 + \int_1^{+\infty} P([U > x]) dx.$$

(d) Calculer $E(U)$.

Exercice 8. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

- (1) (a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 (b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
- (2) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, indépendantes et de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } T_n = Z_n - \ln(n).$$

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T .
- (b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T .
- (3) On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité. A l'aide du changement de variable $y = (1 + e^{-x})e^t$, calculer une densité de $W = U - V$.

Exercice 9. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si Γ désigne la fonction Gamma d'Euler, on rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. De plus, on admet que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$, on a $\Gamma''(x) > 0$. Dans tout l'exercice, on note X une variable aléatoire normale centrée réduite, et l'on pose $Y = |X|$ et $T = \sqrt{Y} = \sqrt{|X|}$.

- (1) (a) Montrer que la variable aléatoire Y est à densité et en donner une densité f_Y .
 (b) Justifier que Y admet une espérance et une variance et les calculer.
- (2) (a) Justifier que T admet une espérance et une variance.
 (b) Calculer $E(T)$ à l'aide du théorème de transfert et du changement de variable $t = \frac{x^2}{2}$, puis montrer que :

$$V(T) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right)^2 \right).$$

- (3) (a) Etablir l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
 (b) En déduire le sens de variation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 (c) Justifier l'encadrement : $1 < \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) < \pi^{1/4}$.
- (4) On considère l'instruction en Python suivante :

```
x=np.sum((rd.exponential(1,10000))**(-1/4))/10000
```

Après exécution, celle-ci renvoie le réel 1.2251307. Que représente ce réel? Justifier.

Exercice 10. Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à densité indépendantes de même loi, positives telles que $E(X_1) = 1$ et admettant une variance non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

- (1) (a) Montrer que $E(\sqrt{X_1})$ existe et appartient à $]0, 1[$.
 (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n E(\sqrt{X_i}) = 0$.
 (c) Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.
- (2) On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A . Soit X une variable aléatoire positive, à densité, admettant un moment d'ordre 2 non nul, et soit $\theta \in]0, 1[$.
 (a) Montrer que : $E(X \mathbf{1}_{[X \leq \theta E(X)]}) \leq \theta E(X)$.
 (b) Montrer que : $E(X \mathbf{1}_{[X \geq \theta E(X)]}) \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{P(X \geq \theta E(X))}$.

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$P(X \geq \theta E(X)) \geq \frac{(1 - \theta)^2 (E(X))^2}{E(X^2)}.$$

(3) Déduire de la question précédente que

$$P\left(\sqrt{Y_n} \geq \frac{1}{2} E(\sqrt{Y_n})\right) \geq \frac{1}{4} \left(E(\sqrt{X_1})\right)^{2n}.$$

(4) Dans cette question, on suppose que $E(\sqrt{X_1}) \geq 1$ (et donc on ne suppose plus que $E(X_1) = 1$). Montrer que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Exercice 11.

- (1) On considère deux variables aléatoires Y et Z indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.
 - (a) Donner une densité de $-Y$.
 - (b) Donner une densité de $Z - Y$.
 - (c) Déterminer la probabilité $P(Y \leq Z)$.
- (2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$, et l'on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

- (a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.
- (b) Déterminer la loi de M_n .
- (3) (a) Déduire des questions précédentes la valeur de $P(X_i = M_n)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (b) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donné, la variable aléatoire $X_i - M_n$ est-elle à densité?
- (4) On considère la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def bidule(n):
    c=0
    for k in range(10000):
        x=np.zeros(n)
        for i in range(n):
            x[i]=rd.exponential(1/i)
        m=np.min(x)
        if x[1]==m:
            c=c+1
    return c/10000
```

De quelle valeur le réel affiché est-il proche ?

Exercice 12. Soit n un entier ≥ 2 , soit $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et posons :

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2} & \text{si } t \in [-1, 0[\\ \frac{1+\theta}{2} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par la suite, on désigne par X une variable aléatoire admettant f_θ comme densité et par $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la loi de X .

- (1) On pose : $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.
 - (a) Déterminer un réel c tel que $\widehat{F}_n = cF_n$ soit un estimateur sans biais de θ .
 - (b) Montrer que $\widehat{F}_n$ est un estimateur convergent de θ .
- (2) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on désigne par Y_n le nombre de variables parmi les variables X_k qui ont pris une valeur positive ou nulle.
 - (a) Montrer que Y_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

- (b) Montrer que $\widehat{\theta}_n = \frac{2}{n}Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ .
 - (c) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ .
- (3) (a) Déterminer un réel $\lambda > 0$ tel que : $\left| \sqrt{1 - \widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1 - \theta^2} \right| \leq \lambda \left| \widehat{\theta}_n - \theta \right|$.
- (b) Montrer que $\sqrt{1 - \widehat{\theta}_n^2}$ est un estimateur convergent de $\sqrt{1 - \theta^2}$.
 - (c) Montrer que la suite $\left(\sqrt{n} \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} \right)$ converge en loi vers une variable normale centrée réduite.