CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

ANNALES DES ÉPREUVES ORALES DE MATHÉMATIQUES

2023

AVANT-PROPOS

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP regroupent les exercices posés en 2023 ainsi que leurs corrigés dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cet ouvrage devrait permettre aux futurs candidats une meilleure préparation à l'épreuve orale de mathématiques de ESCP et fournir une aide efficace aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

De plus, ces annales constituent également un outil pouvant faciliter la préparation aux épreuves écrites de mathématiques du concours quelle que soit leur option (mathématiques approfondies, mathématiques appliquées, littéraire B/L ou technologique) ; la plupart des thèmes abordés dans les sujets d'oral se retrouvent en effet, peu ou prou, dans les sujets de l'écrit.

L'attention des candidats et des professeurs qui les préparent est néanmoins attirée sur le fait que les corrigés proposés sont destinés aux interrogateurs qui savent bien que certaines formulations abrégées des réponses ne sont pas exactement celles qui sont attendues des candidats (qui doivent être plus complètes ou plus conformes aux formulations précises du programme officiel de leur filière). De plus, certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en quatre rubriques : analyse, algèbre, probabilités et sujets de l'option littéraire B/L.

Chaque candidat doit exposer en une vingtaine de minutes son sujet principal préparé en salle et résoudre directement au tableau, pendant le temps restant, une courte question dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

On trouvera le contenu des annales sur le site internet de ESCP (escp.eu) ; aller dans **Programmes and Training**, puis **Premaster year**, puis **ADMISSIONS** et **LE CONCOURS PREPA ESCP BUSINESS SCHOOL**, puis, dans l'étape 2, les **Annales des épreuves orales de Mathématiques**.

Enfin ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration et l'investissement dans la conception des exercices, de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de ESCP . Nous les en remercions.

Léon LAULUSA, Directeur Général ESCP.

Muriel GRANJEAN, Responsable des Admissions ESCP.

Frédéric CADET et Henri LEMBERG, Responsables des épreuves orales
de mathématiques du concours ESCP.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

ALGÈBRE

Sujet 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne respectivement par $\operatorname{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ le noyau et l'image de M.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$ où I est la matrice identité d'ordre n.

1. On considère une matrice involutive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(I - A)$ et $\operatorname{Ker}(I + A)$ sont supplémentaires. En déduire que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \in [\![-n, n]\!]$. Étudier la parité de $\operatorname{Tr}(A)$ en fonction de celle de n.
   (c) Que peut-on dire de plus sur les sous espaces $\operatorname{Ker}(I-A)$ et $\operatorname{Ker}(I+A)$ lorsque A est aussi symétrique ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire canonique).*

2. Dans cette question, on considère deux matrices involutives A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Développer et simplifier les produits $(A + B)(A - B)$ et $(A - B)(A + B)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Im}(AB - BA) \subset \operatorname{Im}(A + B) \cap \operatorname{Im}(A - B)$.
   (c) Prouver que $\operatorname{Im}(AB - BA) = \operatorname{Im}(A + B) \cap \operatorname{Im}(A - B)$.

3. On se place dans le cas où $n = 2$ et on considère les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = 4\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Existe-t-il $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit solution de l'équation $MZ - ZM = N_1$?
   (b) On cherche maintenant à savoir s'il existe une matrice involutive A qui vérifie $MA - AM = N_2$. Montrer que l'on a nécessairement $\operatorname{Tr}(A) = 0$. En utilisant la question 2.(c) déterminer l'ensemble des possibilités pour une telle matrice involutive A.
   (c) Si A et Z sont deux solutions de l'équation $MU - UM = N_2$ d'inconnue $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que peut on dire de la matrice $Z - A$? En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $MU - UM = N_2$.

Solution du sujet 1.1

1. (a) Avec le cours ou par vérification immédiate, on voit déjà que $\mathrm{Ker}(I-A) \cap \mathrm{Ker}(I+A) = \{0\}$. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on peut écrire $X = \dfrac{1}{2}\left((I+A)X + (I-A)X\right) = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2)$ avec $(I-A)X_1 = (I+A)X_2 = (I-A^2)X = 0$, et par suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(I-A) + \mathrm{Ker}(I+A)$. Finalement, on a bien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(I-A) \oplus \mathrm{Ker}(I+A)$ et le cours nous dit alors que A est diagonalisable.

   (b) Comme $A = R^{-1}DR$ avec R inversible et D diagonale, il vient $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(R^{-1}DR) = \mathrm{Tr}(DRR^{-1}) = \mathrm{Tr}(D) = \dim(\mathrm{Ker}(I-A)) - \dim(\mathrm{Ker}(I+A)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(I-A)) - n$. Si n est pair, on voit que l'ensemble des valeurs possibles pour $\mathrm{Tr}(A)$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs de $[\![-n,n]\!]$. Lorsque n est impair, cet ensemble est celui des entiers relatifs impairs de $[\![-n,n]\!]$.

   (c) Dans ce cas les sous espaces $\mathrm{Ker}(I-A)$ et $\mathrm{Ker}(I+A)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

2. (a) Comme $A^2 = B^2 (= I)$, on trouve $(A+B)(A-B) = BA - AB$ et $(A-B)(A+B) = AB - BA$.

   (b) Si $Y = (AB - BA)X$, on exploite la question précédente on observe que

$$Y = (A-B)(A+B)X = -(A+B)(A-B)X \in \mathrm{Im}(A+B) \cap \mathrm{Im}(A-B),$$

   ce qui implique bien l'inclusion voulue.

   (c) On écrit $Y = (A+B)X_1 = (A-B)X_2$, avec 2 (a) il vient $(A-B)Y = (AB-BA)X_1$ et $(A+B)Y = -(AB-BA)X_2$, d'où $2AY = (AB-BA)(X_1 - X_2)$.
   Comme $A^2 = I$, on obtient

$$2Y = A(AB-BA)(X_1-X_2) = (B-ABA)(X_1-X_2) = (BA-AB)A(X_1-X_2) \in \mathrm{Im}(AB-BA).$$

   L'inclusion réciproque est donc prouvée et par suite $\mathrm{Im}(AB-BA) = \mathrm{Im}(A+B) \cap \mathrm{Im}(A-B)$.

3. (a) Supposons qu'il existe $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant cette équation, en appliquant la trace à cette égalité on obtient $0 = \mathrm{Tr}(MZ) - \mathrm{Tr}(ZM) = \mathrm{Tr}(N_1) = 1$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution.

   (b) D'après la question 1. (b), $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, 0, 2\}$.
   Supposons que $\mathrm{Tr}(A) = -2$ (resp. $\mathrm{Tr}(A) = 2$), comme A est diagonalisable (cf. 1. (a)) et que $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$, la seule possibilité est $A = -I$ (resp. $A = I$) ce qui est impossible d'après l'équation. On a donc nécessairement $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Avec la question 2. (c), on voit que l'on doit avoir $\mathrm{Im}(A+M) \cap \mathrm{Im}(A-M) = \mathrm{Im}(MA - AM) = \mathrm{Im}(N_2) = \mathrm{Vect}(1,-1)$, ce qui implique que l'une des deux matrices $A+M$ ou $A-M$ est non inversible et non nulle.
   Par suite, on a nécessairement $\mathrm{Im}(A+M) = \mathrm{Vect}(1,-1)$ ou $\mathrm{Im}(A+M) = \mathrm{Vect}(1,-1)$.
   Si $\mathrm{Im}(A+M) = \mathrm{Vect}(1,-1)$ (resp.$\mathrm{Im}(A-M) = \mathrm{Vect}(1,-1)$), la somme des coefficients de chaque colonne de $A+M$ (resp. $A-M$) est nulle et comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$ il en résulte que l'on peut écrire A avec un seul paramètre que l'on détermine facilement en calculant par exemple le coefficient $(MA - AM)_{1,1}$.
   La vérification que les deux matrices trouvées sont bien involutives est triviale.
   L'ens. des A involutives vérifiant $MA - AM = N_2$ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$.

   (c) Si A et Z sont deux solutions se l'équation $MU - UM = N_2$, on observe que $M(Z-A) - (Z-A)M = 0$ et par suite que $Z - A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec M que l'on détermine facilement. En prenant pour A l'une des deux matrices trouvées précédemment, il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $MU - UM = N_2$ est donné par $\mathcal{S} = A + \mathcal{C}$. Finalement, on trouve

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+s & 1+t \\ -3+t & -2+s \end{pmatrix} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Sujet 1.2

1. Soit P un polynôme de degré $k > 0$ et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) = kP(x)$.
   (a) Montrer que 0 est une racine de P.
   (b) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leqslant k$ et Q un polynôme ne s'annulant pas en 0 tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^r Q(x)$.
   (c) En conclure que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^k$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée d'ordre n non nulle.

2. (a) On note $\mathcal{Z}(A)$ l'ensemble des polynômes non nuls annulateurs de A. Justifier l'existence de $\min\limits_{P \in \mathcal{Z}(A)} \deg(P)$. On note r ce minimum.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur de A de degré r et de coefficient dominant 1. **On note Π_A ce polynôme et on l'appelle le polynôme minimal de A.**

3. On suppose dans cette question qu'il existe une matrice carrée B d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $AB - BA = A$.
   (a) Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.
   (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kA^k = A^k B - BA^k$.
   (c) En déduire que $A\Pi_A'(A) = 0$.
   (d) En conclure que $A^r = 0$.

4. On suppose maintenant qu'il existe B et C carrées d'ordre n telles que $AB - BA = A + C$ et $BC = CB$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + C)^m = 0$.

Solution du sujet 1.2

1. (a) On évalue la relation donnée en $x = 0$, ce qui donne $0P'(0) = kP(0)$ avec k non nul, d'où $P(0) = 0$.

   (b) Soit r l'ordre de multiplicité de 0 pour le polynôme P. Alors $r \in [\![1, k]\!]$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = x^r Q(x)$, avec $Q(0) \neq 0$.

   (c) On a en dérivant : $xP'(x) = x(rx^{r-1}Q(x) + x^r Q'(x)) = rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x)$.
   D'où, d'après l'hypothèse, $rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x) = kx^r Q(x)$.
   On simplifie par x^r. En 0, cela donne $rQ(0) = kQ(0)$, d'où $k = r$ et puisque P est unitaire : $P(x) = x^k$.

2. (a) $\{deg(P), P \in \mathcal{Z}(A)\}$ est non vide et inclus dans $\mathbb{N}^*$, donc cet ensemble admet un minimum.

   (b) Unicité : par l'absurde, si P et Q sont deux polynômes disctints de degré r et unitaires, alors $P - Q$ est non nul de degré inférieur ou égal à $r - 1$ et annulateur de A, ce qui contredit la minimalité de r.
   Existence : si P est un polynôme non nul de degré r annulateur de A et de coefficient dominant α, alors $\frac{1}{\alpha}P$ convient.

3. (a) Si A est inversible, alors $ABA^{-1} - B = I_n$, d'où $tr(ABA^{-1} - B) = n$, c'est à dire $tr(ABA^{-1}) - tr(B) = 0 = n$, ce qui est absurde.

   (b) Par récurrence sur k. Initialisation pour $k = 0$ triviale. Hérédité : on a

   $$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^k B - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1} = AkA^k + (AB - BA)A^k = kA^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$

   (c) Posons $\Pi_A(x) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k x^k$. Alors $\Pi'_A(x) = \sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^{k-1}$, d'où $x\Pi'_A(x) = \sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^k$.
   Ainsi :

   $$\begin{aligned} A\Pi'_A(A) &= \sum_{k=1}^{r} k\alpha_k A^k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A^k B - BA^k) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right)B - B\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right) \\ &= \Pi_A(A)B - B\Pi_A(A) = 0. \end{aligned}$$

   (d) Par unicité de π_A, on a : $\Pi_A(x) = \frac{1}{r}x\Pi'_A(x)$, soit $r\Pi_A(x) = x\Pi'_A(x)$,
   d'où $\Pi_A(x) = x^r$, en utilisant la question 1.

4. Posons $A' = A + C$, alors $A'B - BA' = (A+C)B - B(A+C) = AB + CB - BA - BC = AB - BA = A'$.
   D'où si m est le degré du polynôme minimal, alors $A'^m = 0$, c'est à dire $(A + C)^m = 0$.

Sujet 1.3

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux non nuls de E.

1. Montrer que pour tout x de E, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$.
2. En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout x de E, on a $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
   En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit $f = p \circ q \circ p$.
   Montrer que l'endomorphisme f de E est symétrique et que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.
   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(G+H)^{\perp} = G^{\perp} \cap H^{\perp}$.
   (d) Soit $F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^{\perp}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$. Déterminer $p \circ q(x)$.
   (e) Conclure.

Solution du sujet 1.3

1. Comme il s'agit d'une projection orthogonale, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux d'où en appliquant le théorème de Pythagore
$$||p(x)||^2 \leqslant ||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2 = ||x||^2.$$
2. Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $p(q(x)) = \lambda x$. Donc
$$||p \circ q(x)||^2 = ||p(q(x))||^2 \leqslant ||q(x)||^2 \leqslant ||x||^2.$$
D'où $|\lambda|\ ||x||^2 \leqslant ||x||^2$ et comme x est non nul, $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Pour tout x de E, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux.
Donc $\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0$ soit $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $\langle p(q(x)), q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda\langle x, q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda||q(x)||^2 = \lambda^2||x||^2$.
Si $\lambda \neq 0$ alors comme x est non nul, on a $||q(x)||^2 = \lambda||x||^2$ d'où $\lambda > 0$. On en conclut que $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit x et y deux vecteurs, on a puisque p et q sont des endomorphismes symétriques
   $$\langle f(x), y\rangle = \langle p \circ q \circ p(x), y\rangle = \langle q \circ p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), q \circ p(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$
   Ainsi f est un endomorphisme symétrique sur E.
   De plus soit x de $\mathrm{Im}(p)$, $f(x) = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

   (b) On applique le théorème spectral à l'endomorphisme f restreint à $\mathrm{Im}(p)$. Il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de f. Par ailleurs tout vecteur propre de f dans $\mathrm{Im}(p)$ est aussi un vecteur propre de $p \circ q$ puisque pour tout vecteur x de $\mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$. Il existe donc une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.

   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in G^\perp \cap H^\perp$ et soit $y \in G + H$. Ainsi
   $$\exists u \in G, \exists v \in H, y = u + v.$$
   Donc $< x, y >=< x, u > + < x, v >= 0$. D'où $x \in (G + H)^\perp$. Ce qui donne une première inclusion. Réciproquement, on a $G \subset G + H$ et $H \subset G + H$ donc $(G + H)^\perp \subset G^\perp$ et $(G + H)^\perp \subset H^\perp$ d'où la deuxième inclusion.

   (d) D'après la question précédente, on a
   $$F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp = \mathrm{Ker}(q)^\perp \cap \mathrm{Im}(p)^\perp = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p).$$
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$, $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(q)$ et $v \in F = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$. On a
   $$p \circ q(x) = p(q(u)) + p(q(v)) = 0 + p(q(v)) = p(v) = 0.$$

   (e) On a
   $$F \oplus (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p)) = E.$$
   d'où
   $$(F + \mathrm{Ker}(q)) + \mathrm{Im}(p) = E.$$
   Ce qui permet de conclure que $p \circ q$ est diagonalisable.

Sujet 1.4

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{L}\big(E, \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
On note également $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel de E des matrices symétriques, respectivement antisymétriques.

1. Montrer que $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par : $A \mapsto {}^tA$.
   Calculer $\varphi \circ \varphi$ et en déduire les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. On définit $G : E \to F$ comme l'application qui, à toute matrice $M \in E$, associe l'application $G(M)$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $G(M) : A \mapsto \mathrm{Tr}(MA)$.
   Justifier que G est un isomorphisme de E sur F.

On considère dans la suite un élément non nul u de F, et on note ψ l'application de E dans E définie par : $\psi : A \mapsto u(A)\, I_n$.

4. (a) Justifier qu'il existe une unique matrice $M \in E$ telle que $\forall\, A \in E\,,\ \psi(A) = \mathrm{Tr}(MA)\, I_n$.
   (b) Déterminer le rang de ψ.
   (c) Calculer $\psi \circ \psi$ en fonction de M.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \iff \mathrm{Tr}(M) = 0$.
   (e) En déduire que ψ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
6. Dans cette question, on suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
   On rappelle que cela implique $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (a) Que vaut $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi)$? En déduire la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$, puis que
   $$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big]\,.$$
   (b) Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme $f = \varphi + \psi$ est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Solution du sujet 1.4

1. Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de F sur $\mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R})$. Donc $\dim F = \dim \mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R}) = n^2 = \dim E$.
2. On a $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$;
puis $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de somme (directe) E (à justifier), donc φ diagonalisable.
3. L'application G est linéaire ; $\forall i, j$, $[G(M)](E_{i,j}) = m_{j,i}$, donc $G(M) = 0 \implies M = 0$ d'où $\mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, et par égalité des dimensions démontrée en question 1, G est un isomorphisme.
4. (a) D'après 2. $M = G^{-1}(u)$.
   (b) $u \neq 0$ entraîne $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(I_n)$ donc $\mathrm{rg}(\psi) = 1$.
   (c) L'application ψ est linéaire et $\psi^2(A) = u(A)\, \psi(I_n) = u(A)\, \mathrm{Tr}(M) I_n$ donc $\psi^2 = (\mathrm{Tr} M)\, \psi$.
   (d) On a $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \iff I_n \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff 0 = \psi(I_n) = \mathrm{Tr}(M)\, I_n \iff \mathrm{Tr} M = 0$.
   (e)
   - Si $\mathrm{Tr} M \neq 0$, alors I_n est vecteur propre de ψ associé à $\mathrm{Tr} M \neq 0$; comme $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-espace propre de dimension $n^2 - 1$ d'après 3.b), on a ψ diagonalisable.
   - Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors $\psi^2 = 0$, donc 0 est seule valeur propre de $\psi \neq 0$ (car $u \neq 0$), donc ψ non diagonalisable.
5. Par bijectivité de G,

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi \iff \forall A,\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}({}^t AM) = \mathrm{Tr}({}^t MA) = \mathrm{Tr}(A\, {}^t M) \iff M = {}^t M \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

6. (a) Comme $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de E, mais $I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi) = E$.
   Par la formule de Grassmann, on a alors

$$\dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] = \dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big] + \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\big] - \dim(E) = \frac{n\,(n+1)}{2} - 1$$

   Comme $\mathrm{Vect}(I_n)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$ sont d'intersection nulle, leur somme est directe et incluse dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, puis égale par les dimensions.
   (b) On a

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \implies \varphi\circ\psi(A) = \psi\circ\varphi(A) = -\psi(A) \implies \psi(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Im}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$$

   donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Alors

$$E = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

   qui sont des sous-espaces propres de f associés respectivement à $1 + \mathrm{Tr}(M)$, 1 et -1 ; d'où f est diagonalisable.

Sujet 1.5

Dans cet exercice n est un entier supérieur à 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E.
On dit qu'une application $f : E \to E$ vérifie la relation (P) lorsque :

$$\exists\alpha > 0,\ \forall u, v \in E, \langle f(u), f(v)\rangle = \alpha^2\langle u, v\rangle \quad (P)$$

Attention : l'application f n'est à priori pas supposée linéaire .

1. Montrer que si f vérifie (P) alors f est un endomorphisme de E.
   (on pourra s'intéresser d'abord à $||f(u + \lambda v) - f(u) - \lambda f(v)||$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)
2. Montrer que $f : E \to E$ vérifie (P) si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in E$, on a :
$$||f(u)|| = \alpha||u||.$$
3. Soit f vérifiant (P). En étudiant les valeurs propres de f, montrer que f est bijectif.
4. Soit f vérifiant (P). On note A la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, montrer : ${}^tAA = \alpha^2 I_n$
5. Montrer $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la propriété (P) si et seulement si :
$$\forall(u, v) \in E^2, \langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(u), f(v)\rangle = 0$$
6. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On désigne par p la projection orthogonale sur F.
   Soit $\alpha > 0$ Soit s l'endomorphisme de E défini par : $s = \alpha(2p - \mathrm{id}_E)$
   Montrer que s vérifie (P) et que s est diagonalisable.

Solution du sujet 1.5

1. On a

$$\begin{aligned}
&||f(u+\lambda v)-f(u)-\lambda f(v)||^2\\
&=||f(u+\lambda v)||^2+||f(u)||^2+\lambda^2||f(v)||^2-2\langle f(u+\lambda v,f(u)\rangle-2\langle f(u+\lambda v,\lambda f(v)\rangle+2\lambda\langle f(u),f(v)\rangle\\
&=\alpha^2||u+\lambda v||^2+\alpha^2||u||^2+\lambda^2\alpha^2||v||^2-2\alpha^2\langle u+\lambda v,u\rangle-2\alpha^2\langle u+\lambda v,\lambda v\rangle+2\lambda\alpha^2\langle u,v\rangle\\
&=\alpha^2||u||^2+\lambda^2\alpha^2||v||^2-\alpha^2||u+\lambda v||^2+2\lambda\alpha^2\langle u,v\rangle=0
\end{aligned}$$

   Donc f est un endomorphisme de E.

2. En prenant $v=u$ dans (P), on a : $||f(u)||^2=\alpha^2||u||^2$, soit $||f(u)||=\alpha||u||$.
   Réciproquement, en utilisant une identité de polarisation, et comme f est linéaire, on a : $\forall u,v\in E$,

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\frac{1}{2}(||f(u+v)||^2-||f(u)||^2-||f(v)||^2)=\alpha^2\frac{1}{2}(||u+v||^2-||u||^2-||v||^2)=\alpha^2\langle u,v\rangle$$

3. Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $u\neq 0_E$. On a :

$$||f(u)||=\alpha||u||\Rightarrow|\lambda|.||u||=\alpha||u||\Rightarrow|\lambda|=\alpha>0.$$

   Donc 0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.

4. La propriété (P) se traduit matriciellement par : ${}^t(AU)(AV)=\alpha^2\ {}^tUV$, soit ${}^tU({}^tAA)V=\alpha^2\ {}^tUV$, (avec U,V matrices des coordonnées de u,v dans la base $\mathcal{B}$).
   Si on note β_{ij} l'élément générique de la matrice ${}^tAA$ et en prenant $U={}^t e_i$ et $V={}^t e_j$ on obtient

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!]\ \beta_{i,j}=\alpha^2.\delta_{i,j}\text{ soit : }{}^tAA=\alpha^2\mathrm{Id}_n$$

5. Supposons la propriété (P). Soit $(u,v)\in E^2$. On a

$$\langle u,v\rangle=0\Leftrightarrow\alpha^2\langle f(u),f(v)\rangle=0\Leftrightarrow\langle f(u),f(v)\rangle=0,\text{ car }\alpha\neq 0$$

   Réciproquement supposons que cette équivalence est vraie.
   Alors la famille $\{f(e_1),\cdots,f(e_n)\}$ est orthogonale (car les $e_1,\dots,e_n$ le sont).
   De plus, comme $\langle e_i+e_j,e_j-e_j\rangle=||e_i||^2-||e_j||^2=1-1=0$, on en déduit que $\langle f(e_i+e_j),f(e_i-e_j)\rangle=0$.
   Par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de f, on a donc :

$$||f(e_i)||^2-||f(e_j)||^2=\langle f(e_i)+f(e_j),f(e_i)-f(e_j)\rangle=\langle f(e_i+e_j),f(e_i-e_j)\rangle=0.$$

   Ainsi $||f(e_i)||$ est indépendant de i ; posons $\alpha=||f(e_i)||$.
   Alors la famille $\{\frac{1}{\alpha}f(e_1),\cdots,\frac{1}{\alpha}f(e_n)\}$ est une base orthonormée de E *i.e.* :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\alpha^2\langle e_i,e_j\rangle.$$

   Cette inégalité s'étend alors par linéarité à tous vecteurs u,v de E *i.e.* f vérifie (P)

6. L'endomorphisme p étant un projecteur orthogonal, il est symétrique, donc s aussi (combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques) et donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
   Pour montrer que s (linéaire) vérifie (P) on utilise la caractérisation de la question précédente :

$$\langle s(u),s(v)\rangle=0\iff\langle 2p(u)-u,2p(v)-v\rangle=0\iff 4\langle p(u),p(v)\rangle-4\langle p(u),v\rangle+4\langle u,v\rangle=0,$$

   où l'on a utilisé que p est symétrique *i.e.* $\langle p(u),v\rangle=\langle u,p(v)\rangle$.
   Et, comme $p^2=p$, on a : $\langle p(u),p(v)\rangle=\langle p^2(u),v\rangle=\langle p(u),v\rangle$.
   D'où l'équivalence : $\langle s(u),s(v)\rangle=0\iff\langle u,v\rangle=0$.

Sujet 1.6

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace vectoriel de F des fonctions polynomiales et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'endomorphisme $D : f \mapsto D(f)$ de F, où la fonction $D(f)$ est définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x)\,.$$

1. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par D.

   On note alors Δ_n l'endomorphisme de E_n induit par D.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le noyau et l'image de Δ_n.

   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ_n.
   L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?

   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que pour tout $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta_n(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

   (e) Expliciter P lorsque $Q(x) = x^2$.

   Utiliser P pour retrouver la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit $\varphi : \,]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction, et $g \in F$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in F$ telle que $D(f) = g$ et $\forall\, x \in \,]0,1]\,,\ f(x) = \varphi(x)$.

   (b) L'endomorphisme D est-il surjectif ?

   (c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in F$, différente de la fonction nulle, telle que $D(f) = \lambda\, f$.

Solution du sujet 1.6

1. (a) On a $\forall n\,,\ P \in E_n \implies D(P) = P(x+1) - P(x) \in E_n$.

   (b) L'espace $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ est engendré par les polynômes $(\Delta_n(x^j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ qui valent :

   $$\Delta_n(x^0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![1, n]\!]\,, \quad \Delta_n(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i \in E_{n-1}$$

   La famille $(\Delta_n(x^j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est de degrés croissants, donc libre, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ qui est donc de dimension n. Ainsi, par égalité des dimensions, on a $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}.}$

   De plus on a clairement $E_0 \subset \mathrm{Ker}(\Delta_n)$. Et par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n) = 1$.

   D'où, par égalité des dimensions, on a : $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta_n) = E_0.}$

   Autre idée : utiliser la matrice de Δ_n dans la base $(x^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

   (c) La matrice A de Δ_n dans la base canonique de E_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc 0 est l'unique valeur propre et E_0 l'espace propre associé ; A est non diagonalisable.

   (d) On a $Q \in E_{n-1} = \mathrm{Im}(\Delta_n) \implies \exists P \in E_n\,,\ \Delta_n(P) = Q$; alors $P_1(x) = P(x) - P(0)$ convient, puisque Δ_n est nul sur E_0.

   Si P_2 est une (autre) solution, alors $P_2 - P_1 \in \mathrm{Ker}(\Delta_n) = E_0$, donc P_1 et P_2 diffèrent d'une constante, qui est nulle puisqu'ils ont même valeur en 0.

   (e) Le polynôme cherché $A(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$ vérifie

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 3a &=& 1 \\ 3a + 2b &=& 0 \\ a + b + c &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1/3 \\ b &=& -1/2 \\ c &=& 1/6 \end{array}\right.$$

   d'où

   $$A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)\,(2x-1)}{6}$$

   puis

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[A(k+1) - A(k)\Big] = A(n+1) - A(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

2. (a) Si f est solution, on a par récurrence

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = \varphi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} g(x-k)$$

   d'où au plus une solution, et on vérifie qu'elle convient.

   (b) D'après a), D est surjective.

   (c) En prenant $\varphi = 1$, on a par récurrence comme ci-dessus,

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = (\lambda+1)^n$$

   qui vérifie bien

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad f(x+1) = (\lambda+1)\,f(x) \quad \text{d'où} \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x) = \lambda\,f(x)\,.$$

Sujet 1.7

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^t A$ la transposée de la matrice A.
On admet que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\perp = (\mathrm{Vect}(M))^\perp$, que l'on appelle l'orthogonal de M.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi_A : M \to {}^t AMA$.

1. Montrer que $M^\perp$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{BA}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que Φ_A est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit A une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que $P \in M^\perp$ si et seulement si $\Phi_A(P) \in (\Phi_A(M))^\perp$.
6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Montrer que Φ_A est diagonalisable.
7. Réciproquement, on suppose que Φ_A est diagonalisable et que A admet une valeur propre non nulle. Montrer que A est diagonalisable.

Solution du sujet 1.7

1. Question de cours et $M^\perp$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On vérifie la linéarité de Φ_A.
3. Pour toute matrice M, $(\Phi_A \circ \Phi_B)(M) = {}^tA({}^tBMB)A = {}^t(BA)MBA = \Phi_{BA}(M)$.
4. Par la question précédente, comme $\Phi_{I_n} = I_{\mathcal{M}n(\mathbb{R})}$, on a Φ_A bijective (et $(\Phi_A)^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$).
   Autre idée : utiliser le noyau et la dimension finie.
   Si $M = {}^tM$, alors ${}^t(\Phi_A(M)) = {}^tA^tMA = \Phi_A(M)$. Cela signifie que $\Phi_A : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   Comme Φ_A est injective, sa restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$aussi, donc elle est bijective (la dimension est finie).
5. La relation $\Phi_A(P) \in (\Phi_A(M))^\perp$ est équivalente à
$$0 = \mathrm{Tr}({}^tA^tPA^tAMA) = \mathrm{Tr}({}^tA^tPMA) = \mathrm{Tr}({}^tPMA^tA) = \mathrm{Tr}({}^tPM)$$
6. Soit $(X_1, \dots X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de ${}^tA$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   Pour tout $(i, j) \in [\![1,]\!]$, on pose $M_{i,j} = X_i{}^tX_j$.

   - La matrice $M_{i,j}$ est de rang 1 (donc non nulle) puisqu'aucun des vecteurs propres de A n'est nul.
   - Comme $AX_i = \lambda_i X_i$, on a $\Phi_A(M_{i,j}) = {}^tAX_i{}^tX_jA = \lambda_i\lambda_j X_i{}^tX_j$. Ainsi les matrices $(M_{i,j})$ sont des vecteurs propres de Φ_A.
   - Il reste à montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre. Soit $(a_{i,j})$ une famille de réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}M_{i,j} = 0$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
$$0 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}M_{i,j}(X_k) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}X_i({}^tX_jX_k) = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j}({}^tX_jX_k)\right) X_i$$
     La famille (X_i) est une base ; donc pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}({}^tX_jX_k) = 0$.
     Le vecteur ligne $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}{}^tX_j$ est orthogonal à tout l'espace : il est nul et $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}X_j = 0$.
     Ainsi pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$.
7. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$\varphi : M \to MX$$
   Cette application est surjective ; en effet, soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une matrice M telle que $MX = Y$: par exemple, on complète X en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M est la matrice dans la base canonique de l'application qui envoie X sur Y et les autres vecteurs sur le vecteur nul.
   Soit $(M_{i,j})$ une base de vecteurs propres de Φ_A. Par la surjectivité, la famille $(\varphi(M_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en extrait une base $(M_1X, \dots, M_nX)$.
   Notons λ_i les valeurs propres de Φ_A correspondantes aux M_i, c'est-à-dire que ${}^tAM_iAX = \lambda_iM_iX$. Or $AX = \lambda X$. Donc (puisque $\lambda \neq 0$) :
$${}^tAM_iAX = \lambda_iM_iX \Leftrightarrow \lambda{}^tA(M_iX) = \lambda_iM_iX \Leftrightarrow {}^tA(M_iX) = \frac{\lambda_i}{\lambda}M_iX$$
   Ainsi, la matrice ${}^tA$ est diagonalisable (dans la base $(M_1X, \dots, M_nX)$). Et donc sa transposée A aussi.

Sujet 1.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient g, h deux endomorphismes de E.
   Soit alors l'application $\mathrm{Ker}(g \circ h) \xrightarrow{\varphi} E$ définie par :
   $$\forall u \in \mathrm{Ker}(g \circ h),\ \varphi(u) = h(u).$$
   (a) Comparer $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,g$.
   (b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,h) + \dim(\mathrm{Ker}\,g)$.

On considère désormais un endomorphisme f de E.

2. On suppose que f est diagonalisable. Montrer qu'il existe p nombres $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{R}$ *distincts* (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme P annulateur de f.
3. Réciproquement, on suppose qu'il existe p nombres $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{R}$ *distincts* tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}(f - r_i \mathrm{Id}_E) \geqslant n$.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
4. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors l'endomorphisme $f_{|E_0}$ de E_0 induit par f est, lui aussi, diagonalisable.
5. Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension 3 et f est un endomorphisme diagonalisable de E dont l'ensemble des valeurs propres est formé de deux réels distincts λ et μ.
   Déterminer tous les sous-espace vectoriels de E stables par f.

Solution du sujet 1.8

1. (a) Pour tout $u \in \operatorname{Im}\varphi$, il existe $v \in \operatorname{Ker}(g \circ h)$ tel que $u = h(v)$.
   Donc $g(u) = (g \circ h)(v) = 0$ *i.e.* $u \in \operatorname{Ker} g$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker} g.}$

   (b) Le $\boxed{\text{théorème du rang pour } \varphi}$ donne : $\dim(\operatorname{Ker}(g \circ h)) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi)$.
   Or, par croissance de la dimension, la question précédente donne $\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} g)$.
   Et, comme φ est une restriction de h, on a $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker} h$, donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} h)$.

2. Si $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres *distinctes* de f, alors $P(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_p)$ convient, puisque $P(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = 0$, si $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice de f dans une base de vecteurs propres (car alors $\lambda_i \in \{r_1, \ldots, r_p\}$ pour tout i).

3. (a) $\boxed{\text{Par récurrence finie sur } k \in [\![1, p]\!], \text{ avec question 1b,}}$ on montre que :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim\Big(\big(\operatorname{Ker}(f - r_i \operatorname{Id}_E)\big)\Big) \geqslant \dim\Big(\operatorname{Ker}\big((f - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_k \operatorname{Id}_E)\big)\Big).$$

   Or, pour $k = p$, comme P est annulateur de f, on a $\dim\Big(\operatorname{Ker}\big((f - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_k \operatorname{Id}_E)\big)\Big) = n$.

   (b) Comme la somme des dimensions des sous espaces propres $\operatorname{Ker}(f - r_i \operatorname{Id}_E)$ dépasse n et que ces sous-espaces sont toujours en somme directe, $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont supplementaires dans } E.}$
   Donc f est diagonalisable.

4. D'après la $\boxed{\text{question 2}}$, il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.
   Alors ce polynôme est aussi annulateur de $f_{|E_0}$, puisque $\big(P(f_{|E_0})\big)(u) = \big(P(f)\big)(u)$ pour tout $u \in E_0$.
   Donc, d'après la $\boxed{\text{question 3b appliquée à } f_{|E_0},}$ l'endomomorphisme $f_{|E_0}$ est diagonalisable.

5. Comme f est diagonalisable, on a $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) = 3$.
   Quitte à échanger λ et μ, on peut supposer que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) = 1$.
   Tout sous-espace propre de f est stable par f, voire tout sous-espace d'un sous-espace propre est stable.
   Par ailleurs, la somme de deux sous-espaces stables est stable.
   Donc, en triant selon la dimension, cela donne déjà les sous-espaces propres suivants :

   - dimension 0 : $\boxed{\{0\}\,;}$
   - dimension 1 : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E),}$ $\boxed{\text{toute droite vectorielle incluse dans } \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)\,;}$
   - dimension 2 : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)\,;}$
     tout $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) \oplus D,}$ où D est une droite incluse dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$;
   - dimension 3 : $\boxed{E.}$

   Montrons qu'il n'y en a pas d'autres ; les dimensions 0 et 3 sont évidentes.
   Soit E_0 un sous-espace stable de dimension 1 ou 2, alors, d'après la question 4, $f_{|E_0}$ est diagonalisable.
   De plus les vecteurs propres de $f_{|E_0}$ sont des vecteurs propres de f, donc E_0 possède une base formée de vecteurs propres de f.
   Si E_0 est de dimension 1, alors forcément $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E)$ ou $E_0 \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
   Si E_0 est de dimension 2, alors forcément $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ ou $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) \oplus D$, où D est une droite vectorielle incluse dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Sujet 1.9

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

1. (a) Expliciter la matrice $Q \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tous U et V deux vecteurs colonne de $\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées respectives $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant m}$ et $(v_n)_{0 \leqslant n \leqslant m}$, on ait :

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!]\,, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} v_k \right] . \tag{1.1}$$

   Justifier que Q est inversible.

   (b) Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ défini par, pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$, $T(P)(X) = P(X+1)$. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. En déduire l'inverse de Q.

   (c) En déduire, si U, V vérifient (1), alors :

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!]\,, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k \right] . \tag{1.2}$$

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big[\varphi(P)\big](x) = P(x+1) - P(x)\,.$$

2. (a) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et expliciter sa matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, \ldots, X^m\big)$ de E.

   (b) Déterminer l'image et le noyau de φ.

   (c) Étudier la diagonalisabilité de φ.

   (d) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note φ^p la composée p fois : $\varphi^p = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$; on convient que $\varphi^0 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\big[\varphi^p(P)\big](X) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \left[(-1)^k \binom{p}{k} P(X+k) \right] . \tag{1.3}$$

   (e) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$, la valeur de

$$S_{j,p} = \sum_{k=0}^{p} \left[(-1)^k \binom{p}{k} k^j \right] .$$

3. Pour tous $P \in E$ et $n \in [\![0, m]\!]$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \varphi^k(P)(x) \right] .$$

SOLUTION DU SUJET 1.9

1. (a) La relation s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \binom{m}{1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où $Q = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m+1}$ est la matrice de PASCAL (triangulaire inférieure, carrée de taille $m+1$), de coefficients $q_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ en position (i,j), avec la convention usuelle $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$.

La matrice Q est triangulaire à éléments diagonaux non nuls, donc est inversible.

(b) Il est clair que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$; on trouve que sa matrice est ${}^tQ$.

Or la réciproque de T est $P \to P(X-1)$, dont la matrice s'obtient comme dans la question préédente ; cette matrice est $({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q)^{-1}$; on en déduit la valeur de Q^{-1}, soit $Q^{-1} = \left(c_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m+1}$ avec $c_{i,j} = (-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1}$.

(c) Comme $V = Q^{-1}U$, on a

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!]\,, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}u_k\right]$$

2. (a) L'application φ est linéaire de E dans E et pour tout $j \in [\![0, m]\!]$,

$$\varphi(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}x^i \in E \quad \text{d'où} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } j > i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, A est triangulaire supérieure stricte.

(b) D'après la matrice, $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{m-1}[X]$; d'où $\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{m-1}[X]}$ par égalité des dimensions (car A est clairement de rang m).

On a clairement $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, d'où l'égalité $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]}$ par la dimention (via le théorème du rang).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ et A non diagonalisable.

(d) Soit τ l'endomorphisme de E défini par $\forall\, P \in E$, $\tau(P) = P(X+1)$.

Comme τ et Id_E commutent, la formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$ appliquée à $\varphi = \tau - \operatorname{Id}_E$ donne (1.3).

(e) Comme φ abaisse le degré de 1, pour $j < p$ et $P(X) = X^j$, on a $\varphi^p(X^j) = 0$, d'où en évaluant en 0 : $0 = \varphi^p(X^j)(0) = (-1)^p S_{j,p}$.

3. La matrice Q étant inversible, si (u_n) et (v_n) vérifient (1.2) alors ils vérifient (1.1) ; donc

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\varphi^k(P)(x)\right] = P(x+n)$$

(qu'on peut aussi retrouver par la formule du binôme appliquée à $\tau = \varphi + \operatorname{Id}_E$).

Sujet 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x)$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soient les fonctions $e_k : x \mapsto x^k$, et $f_k : x \mapsto x^k \ln(x)$.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
2. Pour toute fonction f de E et tout $x > 0$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Pour tout $f \in E$ on définit la fonction $u(f)$ par :

$$\forall x > 0,\ (u(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ déterminer $u(e_k)$ et $u(f_k)$.
4. Montrer que u est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il bijectif ?
6. Soit f un vecteur propre de E associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$.
   Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^{-\frac{1}{\lambda}} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
   Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire une expression explicite de la fonction f.
7. Pour chaque valeur propre λ de u, déterminer la dimension de l'espace propre associé.
   L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution du sujet 1.10

1. (a) Chaque fonction e_k ou f_k est continue sur $\mathbb{R}^+$ ou admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $E = \text{Vect}(e_1, f_1, \dots, e_n f_n)$ est un sous espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. E est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions continues $C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

   (b) Soit $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_i f_i = P(x) + Q(x) \ln x = 0$, avec P et Q éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Si l'on avait $P \neq 0$, on pourrait écrire que $\ln x = -\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ qui est une fraction rationnelle.

   Donc au voisinage de $+\infty$, on aurait $\ln x = -\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim \lambda x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$, ce qui contradirait les théorèmes de croissances comparées que que soit α. Donc $P = 0$, d'où $Q = 0$. Ainsi $\dim(E) = 2n$.

2. Comme $x \mapsto x \ln x$ converge vers 0 en 0 tout élément de f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$, d'où la convergence de l'intégrale.

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1} x^k = \frac{1}{k+1} e_k(x) \text{ et } u(f_k) = \frac{1}{k+1} f_k - \frac{1}{(k+1)^2} e_k \qquad (**)$$

4. La linéarité de u provient de la linéarité de l'intégration. On sait que $u(e_k)$ et $u(f_k)$ sont tous deux dans E. Par linéarité, l'image de toute f de E est dans E.

   D'après $(**)$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure,
   avec sur la diagonale $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}$,
   sur la sur-diagonale $\left(-\dfrac{1}{2^2}, 0, -\dfrac{1}{3^2}, 0, \dots, -\dfrac{1}{n^2}, 0, -\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$,
   et des 0 partout ailleurs.

5. La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale.
   Comme 0 n'est pas valeur propre de u, u est bijectif.

6. D'après la question 2, l'intégrale définissant $g(x)$ est bien définie pour $x \geqslant 0$.
   Comme $u(f) = \lambda f$, on a pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = x\lambda f(x)$. Ainsi, pour $x > 0, g(x) = \lambda x^{1-\frac{4}{\lambda}} f(x)$.

   En dérivant l'égalité définissant g, il vient $\forall x > 0, g'(x) = \frac{-1}{\lambda} x^{-\dfrac{1}{\lambda}-1} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + x^{-\frac{1}{\lambda}} f(x) = 0$.
   La fonction g est donc égale à une constante c sur $\mathbb{R}_+^*$. Et, comme $\lambda > 0$, on obtient :

$$\exists c \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = c x^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

7. Les valeurs propres de u sont toutes non nulles (cf. Q5), donc les sous-espaces propres sont tous de dimension 1 (cf. Q6). Précisément pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $E_{\frac{1}{k+1}} = \text{Vect}(e_k)$, car d'après $(**)$, $e_k \in E_{\frac{1}{k+1}}(u)$.
   Donc u n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n tandis que la dimension de E est $2n$ — et $n \neq 2n$ car $n \neq 0$.

Sujet 1.11

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

- pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$) signifie que tous les coefficients de M sont positifs (respectivement strictement positifs).
  On dit alors que M est positive (respectivement strictement positive).
- pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$, alors on a $BX \geqslant 0$.
   (b) Établir, réciproquement, que si, pour tout matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive on a $BX \geqslant 0$, alors B est positive.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on dit qu'elle est **productive** si A est positive et s'il existe une matrice colonne $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, positive, telle que $P > AP$.

Dans les questions 2 à 4 on considère A et P deux matrices vérifiant les conditions de cette définition.

2. Montrer que $P > 0$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que $X \geqslant AX$. On pose $c = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \dfrac{x_j}{p_j}$.
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   (a) Établir que : $c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - c p_j)$.
   (b) En déduire que $c \geqslant 0$, puis que X est positive.
   (c) On suppose que : $X = AX$.
   En utilisant l'inégalité $-X \geqslant A(-X)$, montrer que $X = 0$ et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
4. (a) Soit $X \geqslant 0$. Montrer que $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive. En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   (b) On considère dans cette question B une matrice carrée positive telle que $I_n - B$ soit inversible et d'inverse positive.
   Soit $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice colonne dont toutes les composantes valent 1.
   Montrer que $V > BV$. Conclure.
5. Donner une caractérisation des matrices productives.

Solution du sujet 1.11

1. (a) Si l'on note $b_{i,j}$ les coefficients de B et x_j ceux de X, alors les coefficients de BX sont les $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_j$ qui sont tous positifs.

   (b) Notons $E_1, ..., E_n$ la base canonique des matrices colonnes d'ordre n, alors BE_j est égale à la j-ème colonne de B. Elle est positive d'où B est positive.

2. $AP \geqslant 0$ et $P > AP$ d'où $P > 0$ (en raisonnant coefficient par coefficient).

3. (a) $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) = x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}cp_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}cp_j$

   d'où $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j)$.

   (b) Pour tout j compris entre 1 et n, $x_j \geqslant cp_j$ par définition de c d'où $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j) \geqslant 0$ et $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j > 0$, d'uù $c \geqslant 0$.

   c étant positif, pour tout k compris entre 1 et n, $\frac{x_k}{p_k} \geqslant 0$, d'où $x_k \geqslant 0$ *i.e.* $X \geqslant 0$.

   (c) Puisque $AX = X$ alors $-AX = -X$ donc $A(-X) \geqslant -X$. D'après la question précédente $-X \geqslant 0$. Ainsi ayant aussi $X \geqslant 0$, on a $X = 0$.
   On vient de prouver que $AX = X$ implique $X = 0$ ce qui prouve de $I_n - A$ est inversible.

4. (a) $Y - AY = (I_n - A)(I_n - A)^{-1}X = X$. D'où $Y \geqslant AY$ ce qui montre d'après la question 3.b) que $Y \geqslant 0$.
   On a établi que pour tout $X \geqslant 0$, $(I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$, donc d'après la question 2, $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

   (b) On a $V - BV = (I_n - B)V = (I_n - B)(I_n - B)^{-1}U = U$, d'où on a bien $V - BV > 0$ i.e. $V > BV$. D'où B est productive.

5. On a démontré dans les questions 1 à 4.a) que si A est une matrice productive alors $(I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   Dans la question 4.b), on a établi que si B est positive, $(I_n - B)$ inversible et $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$ alors elle est productive.
   Ainsi A est productive si et seulement si $A \geqslant 0$, $(I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

Sujet 1.12

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E.

On dit que l'endomorphisme u est antisymétrique si

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle .$$

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. (on pourra développer $\langle u(x+y), x+y\rangle$ pour démontrer une direction).

Dans la suite de l'exercice, on suppose que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.
4. Montrer que $u \circ u$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont toutes négatives ou nulles.
5. Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'endomorphisme u.

On suppose désormais que u est un isomorphisme de E sur E.

6. Soit $\lambda < 0$ et $e \neq 0$ tels que $(u \circ u)(e) = \lambda e$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e, u(e))$ est un plan vectoriel stable par u.
7. Montrer qu'il existe des plans vectoriels $P_1, \ldots, P_k$ de E vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,k]\!], P_i \text{ est stable par } u. \\ E = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \\ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, i \neq j \Rightarrow P_i \perp P_j \end{cases}$$

8. Que peut-on en conclure sur la dimension de E ?

Solution du sujet 1.12

1. $\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle$.
   $(\Rightarrow) : \forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$ donc $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   $(\Leftarrow) : 0 = \langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$ donc u est antisymétrique.
2. $(\Rightarrow)$: Soit $M = M_B(u) = (m_{i,j})$. La base B est orthonormée donc $m_{i;j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -m_{j,i}$ donc M est antisymétrique.

   $(\Leftarrow)$: Soit X, Y vecteurs coordonnées de x, y dans B.
   On a $\langle u(x), y\rangle = (MX)^T Y = X^T M^T \times Y = -X^T \times MY = -\langle x, u(y)\rangle$ donc u est un endomorphisme antisymétrique.
3. Soit x un vecteur propre associé à λ. On a $\langle u(x), x\rangle = 0$ donc $\langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$ donc $\lambda = 0$ (car $x \neq 0$).
4. On a $\langle u \circ u(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u \circ u(y)\rangle$ donc $u \circ u$ est un endomorphisme sym étrique.
   Soit x un vecteur propre de $u \circ u$ associé à λ.
   On a $\langle u \circ u(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2$ et $\langle u \circ u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$
   donc $\lambda \leqslant 0$ donc $\mathrm{Sp}\,(u \circ u) \subset \mathbb{R}_-$.
5. On suppose que F est stable par f. Montrons que $F^\perp$ est stable par f. Soit $x \in F^\perp$. Montrons $u(x) \in F^\perp$ c'est-à-dire que $\forall y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = 0$. Soit $y \in F$. On a $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $x \in F^\perp$ et $y \in F$ donc $u(y) \in F$.
6. On a montré que les valeurs propres de u^2 (endomorphisme symétrique) sont des réels strictement négatifs car u est bijectif.
   Si $u(e) = \mu e$ alors $\mu^2 = \lambda < 0$ donc $(e, u(e))$ est libre.
   $u(ae + bu(e)) = au(e) + b\lambda e \in \mathrm{Vect}\,(e, u(e))$ qui est donc un plan stable par u.
7. Posons $P_1 = vect\,(e, u(e))$. Si $P_1 = E$, le résultat est obtenu.
   Sinon, soit $F = P_1^\perp$. Recommençons le processus avec F.
   Supposons qu'il existe ℓ plans $P_1, \ldots, P_\ell$ de E stables par u et deux à deux orthogonaux.
   Soit $F = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_\ell$ (la somme est directe car les sous espaces sont orthogonaux deux à deux)
   Si $F = E$, le résultat est obtenu. Sinon le sous-espace F est stable par u donc $F^\perp$ est stable par u.
   Soit $v : F^\perp \to F^\perp$ défini par $v(x) = u(x)$. L'endomorhisme u est antisymétrique et bijectif donc v est antisymétrique et injectif donc bijectif donc d'après ce qui précède, il existe un plan $P_{l+1} \subset F^\perp$ stable par v donc par u.et donc
   les plans $P_1, \ldots, P_{\ell+1}$ sont stables par u et orthogonaux deux à deux.
   L'espace E étant de dimension finie, cette construction s'arrête nécessairement, ce qui entraîne le résultat demandé.
8. De par la construction précédente, la dimension de E est paire

Sujet 1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.
On note I_n la matrice identité d'ordre n. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit s un endomorphisme symétrique de E. On note $S = (s_{i,j})_{n,n}$ la matrice de s dans la base canonique. Les valeurs propres de s sont rangées par ordre croissant : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. On note :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{i,j}| \leqslant 1$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E formée de vecteurs propres de s.

Dans toute la suite,pour tout vecteur x de E, on note : $R_s(x) = \langle s(x), x \rangle$.

3. Soit $S(0,1) = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$. Montrer que :
$$\forall x \in S(0,1),\ R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n].$$
4. Inversement, tout élément de $[\lambda_1, \lambda_n]$ est-il de la forme $R_s(x)$, avec $x \in S(0,1)$?
5. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S à l'aide d'un produit scalaire.
Démontrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n$.

Dans toute la suite, si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $\mathrm{Tr}(AS)$, où $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.
(On pourra utiliser sans démonstration le fait que le produit de deux matrices orthogonales d'ordre n est aussi une matrice orthogonale.)
7. Dans cette question, on suppose que s a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.
Montrer que pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a : $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$.
En déduire que T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, maximum que l'on précisera.
Montrer de même que T admet sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un minimum à préciser.

Solution du sujet 1.13

1. La matrice A étant orthogonale, chaque colonne constitue un vecteur normé,
   d'où pour tout i,j, $a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$. Donc $|a_{i,j}| \leqslant 1$.
2. On applique le théorème spectral.
3. Si l'on note $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, et X la matrice colonne associée, la matrice de $s(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à ΔX. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a donc $R_s(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

   Si $||x|| = 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 1$. Par croissance des (λ_i), il vient
   $$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
4. Soit $\mu \in [\lambda_1, \lambda_n]$. Alors il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $\mu = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_n$.
   Posons $x = \sqrt{\alpha}\varepsilon_1 + \sqrt{1-\alpha}\varepsilon_n$. Alors
   $$\langle s(x), x\rangle = \langle \sqrt{\alpha}\lambda_1\varepsilon_1 + \sqrt{1-\alpha}\lambda_n\varepsilon_n, \sqrt{\alpha}\varepsilon_1 + \sqrt{1-\alpha}\varepsilon_n\rangle = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_n = \mu$$
   Autre idée : on peut remplacer les indices 1 et n par i et $i+1$ tels que $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$.
5. $s_{i,j} =< s(e_j), e_i >$ d'où $s_{i,i} = R_s(e_i)$ Il suffit de remarquer que $\|e_i\| = 1$.
   Donc par l'inégalité de Raleigh (Q3) $\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n$.
6. On applique le théorème spectral à S : S étant symétrique (réelle), il existe une matrice orthogonale $n \times n$ notée Q telle que $S = Q\Delta{}^tQ$ d'où $AS = AQ\Delta{}^tQ$ et $T(A) = \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}({}^tQAQ\Delta) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.
   Il reste à vérifier que B est orthogonale.
   Or B est le produit de trois matrices orthogonales, ${}^tQ$, A et Q. B est bien orthogonale.
7. Tout d'abord, il est clair que $T(I_n) = \mathrm{Tr}(S)$

   D'autre part, nous avons vu précédemment que pour toute matrice orthogonale A il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ Or, $(B\Delta)_{i,i} = \lambda_i b_{i,i} \leqslant \lambda_i$, puisque B est orthogonale : car ici $\lambda_i \geqslant 0$.

   D'où $\mathrm{Tr}(B\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.

   Donc finalement, pour toute matrice orthogonale A, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$, le maximum de T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{Tr}(S)$, atteint au moins en $A = I_n$.
   De même, on remarque que $T(-I_n) = \mathrm{Tr}(-S) = -\mathrm{Tr}(S)$. Or, $-I_n$ est aussi dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   De plus, $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ puisque $b_{i,i} \geqslant -1$ et $\lambda_i \geqslant 0$.

   Ainsi, $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), T(A) \geqslant -\mathrm{Tr}(S) = T(-I_n)$

Sujet 1.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynôme réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ associés aux nombres $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}\,.$$

Cette notation de produit signifie que l'indice i prend toutes les valeurs entières de 0 à n, sauf k.

1. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner l'écriture de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{R}[X]$ et $V \in \mathbb{R}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))\,.$$

Dans la suite de cet exercice, on se donne un couple (A, B) de polynômes avec $A \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On suppose dans la suite de l'exercice que B est le polynôme $B(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$ où les réels (x_k) sont distincts.

4. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.
   (a) Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Déterminer $R_k(x_j)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.
   L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution du sujet 1.14

1. On montre que famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre en évaluant une combinaisaon linéaire nulle en tout x_k, car $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$.
   Elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Grâce à la relation $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$, il vient $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k(X)$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme B est non nul car de degré $n+1$. D'après le théorème de la division euclidienne, le reste dans la division euclidienne de AP par B est nul ou de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Ainsi, $\varphi(P)$ est nul ou de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2\,.$$

   De plus, R_1 et R_2 appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ donc $R_1 + \lambda R_2$ aussi.
   Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B, le quotient et le reste dans cette division euclidienne sont respectivement $Q_1 + \lambda Q_2$ et $R_1 + \lambda R_2$.
   L'application φ est donc linéaire.

4. (a) On a $AL_k = BQ_k + R_k$ donc

   $$A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

   car x_j est racine de B.
   Étant donné la valeur de $L_k(x_j)$, on a donc $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et $R_k(x_k) = A(x_k)$.

   (b) D'après la question sur les polynômes de Lagrange, on a donc

   $$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j)L_j = R_k(x_k)L_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} R_k(x_j)L_j = A(x_k)L_k$$

   On a donc $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$; ainsi L_k est un vecteur propre de φ associé à la valeurs propre $A(x_k)$.

   L'endomorphisme φ admet une base formée de vecteurs propres (les polynômes deLagrange).
   Il est donc diagonalisable et il n'y a pas d'autres éléments propres que ceux déjà trouvés.

Sujet 1.15

Soit un entier $p \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. On note I la matrice identité d'ordre p. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on note $\mathrm{Ker}(M)$ (resp. $\mathrm{Im}(M)$) le noyau (resp. l'image) de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

1. (a) Montrer que l'on a : $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB)$ et $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$.

   (b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un nombre réel **non nul.**

   (a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

   (b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ qui n'est pas valeur propre de la matrice AB, on a :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$$

3. Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4. Dans cette question, on choisit les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice BA.

   (b) Après avoir justifié son existence, calculer l'inverse de la matrice $I - AB$.

Solution du sujet 1.15

1. (a) Si $BX = 0$, alors $ABX = 0$. De même, tout vecteur ABX s'écrit $A(BX)$.

   (b) Si la matrice AB est inversible, on a $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker}(AB) = \{0\}$, donc B est inversible.
   De plus, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.
   Autre idée : il existe une matrice C telle que $I_n = (AB)C$, soit $I_n = A(BC)$, d'où A inversible et (idem pour B).

2. (a) Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $X \in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
   Alors, $BAX = \lambda X$ implique $ABAX = \lambda AX$, ce qui donne : $AX \in \operatorname{Ker}(\lambda I - AB) = \{0\}$.
   Donc $AX = 0$; d'où $\lambda X = BAX = 0$; soit $X = 0$ puisque $\lambda \neq 0$.
   Ainsi, $\operatorname{Ker}(\lambda I - BA) = \{0\}$ *i.e.* $(\lambda I - BA)$ est inversible.
   La réciproque s'obtient en échangeant A et B dans le sens direct.

   (b) Comme $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de AB, alors $\lambda I - AB$ est inversible, donc $\lambda I - BA$ aussi.
   Posons $M = \dfrac{1}{\lambda} I + \dfrac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$. On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - AB)M &= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}(\lambda A - ABA)\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}(A(\lambda I - BA))\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}AB = I
\end{aligned}$$

3. La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.
   La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

4. (a) En effectuant le produit BA, on trouve :

$$BA = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

   (b) Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I - AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), ce qui donne :

$$(I - AB)^{-1} = \frac{1}{1-p} \begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & (2-p) \end{pmatrix}$$

Sujet 1.16

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable. Soit D une matrice diagonale semblable à A.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré le plus petit possible. Déterminer ses racines.
3. Montrer, sans calculs matriciels supplémentaires, que le spectre de A est égal à $\{2, 6\}$.
4. En utilisant uniquement la trace de A, préciser la dimension de chacun des sous-espaces propres.
5. Soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble des matrices qui commutent avec D :

$$\mathcal{C}' = \{M' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid DM' = M'D\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}'$.
   (c) Déterminer la dimension de $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Solution du sujet 1.16

1. La matrice A est symétrique réelle, donc il existe une matrice P orthogonale et d'une matrice D diagonale telles que $D = {}^tPAP$.
2. Le calcul matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4&0&2&0\\0&4&0&2\\2&0&4&0\\0&2&0&4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4&0&2&0\\0&4&0&2\\2&0&4&0\\0&2&0&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20&0&16&0\\0&20&0&16\\16&0&20&0\\0&16&0&20 \end{pmatrix} = 8A - 12I_4.$$

   Le polynôme $X^2 - 8X + 12$, est annulateur de A (il n'y en a pas de degré 1, sauf pour les matrices scalaires). Donc les valeurs propres sont parmi des racines, soit 2 et 6.
3. Il y a des valeurs propres car A est diagonalisable.
   Il ne peut y avoir une seule valeur propre λ, sinon A serat semblable à λI_4 donc égale à λI_4.
   Donc le spectre de A est égal à $\{2, 6\}$.
4. On sait que $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A) = 16$.
   Et D comporte $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4))$ (resp. $\dim(\mathrm{Ker}(A - 6I_4))$) coefficients diagonaux égaux à 2 (resp. 6).
   Ces deux dimensions sont non nulles de somme 4.
   Donc, selon que la dimension de $\mathrm{Ker}(A - 2I_4)$ vaut 1,2 ou 3, on a

$$\mathrm{Tr}(D) = 2+6+6+6 = 20 \text{ ou } \mathrm{Tr}(D) = 2+2+6+6 = 16 \text{ ou } \mathrm{Tr}(D) = 2+2+2+6 = 12.$$

   Ainsi seul le cas $\dim \mathrm{Ker}(A - 2I_4) = 2 = \dim \mathrm{Ker}(A - 6I_4)$ est possible.
   Autre idée pour 3+4 : résoudre le système 2×2 :

$$\begin{cases} 2 \times \dim E_2 + 6 \times \dim E_6 & = \mathrm{Tr}(D) \\ \dim E_2 + \dim E_6 & = 4. \end{cases}$$

5. (a) L'ensemble $\mathcal{C}'$ est une partie de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ contenant la matrice nulle. Il reste à vérifier la stabilité par combinaison linéaire, ce qui est élémentaire par bilinéarité du produit matriciel.
   (b) Le candidat fera un calcul avec les 16 coefficients de la matrice M'.
   Le jury pourra vérifier en écrivant $D = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 6I_2 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$.
   Rappel : les produits par blocs ne sont pas au programme en ECG.
   Les solutions sont les matrices de la forme $M' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$.
   Finalement,

$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} | E, H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$$

   On en déduit que $\mathcal{C}'$ est de dimension 8.
   Remarque : dans la solution proposée les valeurs propres sont rangées dans l'ordre $(2, 2, 6, 6)$. *Qu'obtient-on si on les range par exemple sous la forme* $(2, 6, 2, 6)$ *ou* $(6, 6, 2, 2)$ *?*
   (c) On vérifie que $M' \mapsto PM'P^{-1}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$.
   L'ensemble $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{C}'$, donc de dimension 8 également.

Sujet 1.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une suite finie de nombres réels $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est dite :

- *log-concave* lorsque, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$;
- *ultra-log-concave* lorsque la suite finie $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est log-concave.

1. Montrer que la suite finie $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ (formée de coefficients du binôme) est log-concave.
2. Montrer que si une suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra-log-concave, alors elle est log-concave.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme de degré n.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ Q(x) = x^n P(1/x)$.
   Ce polynôme Q sera noté $X^n P(1/X)$.
   (b) Soit $\nu \in \mathbb{N}$ la multiplicité de 0 comme racine de P.
   Exprimer le degré de $X^n P(1/X)$ à l'aide de n et de ν.

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sera dit *scindé* lorsque :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ P = \lambda(X - x_1) \cdots (X - x_n).$$

Ainsi tout polynôme constant est scindé (cas $n = 0$). On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes scindés.

4. Montrer que, pour tout $P \in \mathcal{S}$ de degré n, on a : $X^n P(1/X) \in \mathcal{S}$.
5. Montrer que, pour tout $P \in \mathcal{S}$, on a : $P' \in \mathcal{S}$.
   Indication : penser au théorème de Rolle.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $a_n \neq 0$ et $P \in \mathcal{S}$, où l'on a noté $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose : $Q_1 = P^{(k-1)},\ Q_2 = X^{n-k+1} Q_1(1/X),\ Q_3 = Q_2^{(n-k-1)}$.
   Montrer que $Q_3 \in \mathcal{S}$ et que Q_3 est de degré au plus deux.
   (b) En déduire que la suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra-log-concave.

Solution du sujet 1.17

1. Posons $b_k = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $b_k > 0$ et, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$$\frac{b_k^2}{b_{k-1}b_{k+1}} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2\big((n-k)!\big)^2} \times \frac{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!(n-k+1)!}{(n!)^2} = \frac{k+1}{k} \times \frac{n-k+1}{n-k} \geqslant 1,$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \dfrac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2}a_k^2$; et d'après Q1, on a : $\dfrac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} \leqslant 1$.

   D'où, par produit d'inégalités lorsque $a_{k-1}a_{k+1} \geqslant 0$, et de manière évidente si $a_{k-1}a_{k+1} < 0$, on obtient $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$, pour tout k, c'est-à-dire que $\boxed{(a_k) \text{ est log-concave.}}$

3. (a) Tout polynôme P de degré n s'écrit : $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.

   Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^n P(1/x) = x^n \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^{-j} = Q(x)$ avec $\boxed{Q = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^{n-j}.}$

   Si Q_2 est une autre solution, alors tout $x \in \mathbb{R}^*$ serait racine de $Q - Q_2$ d'où $Q = Q_2$.

   (b) Si 0 est racine d'ordre ν et P, alors $a_0 = \cdots = a_{\nu-1} = 0$ et $a_\nu \neq 0$.
   L'expression trouvée juste avant s'écrit donc :
$$Q = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_\nu X^{n-\nu} + \cdots a_1 X^{n-1} + a_0 X^n = a_n + a_{n-1}X + \cdots + \underbrace{a_\nu}_{\neq 0} X^{n-\nu},$$
   donc $\boxed{\deg(X^n P(1/X)) = n - \nu.}$

4. Si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, en isolant la racine 0 éventuelle, il s'écrit $P = \lambda X^\nu \displaystyle\prod_{k=1}^{n-\nu}(X - x_k)$, avec $x_1, \ldots, x_{n-\nu} \in \mathbb{R}^*$ (pas forcément distincts), où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant, et $\nu \in \mathbb{N}$ est la multiplicité (éventuellement nulle) de 0 comme racine de P.
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si l'on note $Q = X^n P(1/X)$, on a :
$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \lambda \times \left(\frac{1}{x}\right)^\nu \times \prod_{k=1}^{n-\nu}\left(\frac{1}{x} - x_k\right) = \lambda \prod_{k=1}^{n-\nu}(1 - x x_k) = \boxed{\lambda \prod_{k=1}^{n-\nu}(-x_k) \times \prod_{k=1}^{n-\nu}\left(x - \frac{1}{x_k}\right).}$$
   Et le résultat final reste vrai pour $x = 0$ (comme en Q3a), donc $\boxed{Q \text{ est scindé.}}$

5. Soit $x_1 < \cdots < x_r$ les racines de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$; alors $\deg P = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k$. Et :
   - par Rolle, il y a une racine de P' sur chaque intervalle $]x_k, x_k + 1[$, soit $r - 1$ racines ;
   - si x_i est racine d'ordre m_i de P, alors il est racine d'ordre (au moins) $m_i - 1$ de P.

   Ainsi P' est scindé car la somme des multiplicités des racines est au moins $(r-1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{r}(m_k - 1) = \deg P'$.

6. (a) Le polynôme Q_1 est scindé d'après la question **Q5.** et il est de degré $n - k + 1$.
   Ensuite, d'après **Q4.**, le polynôme Q_2 est scindé et de degré au plus $n - k + 1$.
   Enfin, par **Q5.**, le polynôme $\boxed{Q_3 \text{ est scindé, de degré au plus 2.}}$

   (b) Si $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, on calcule $Q_3 = a_{k-1}\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{2}X^2 + a_k k!(n-k)!X + a_{k+1}\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2}$.
   D'après la question précédente ce trinôme est scindé, donc son discriminant est positif ou nul, soit :
$$0 \leqslant \Delta = a_k^2 (k!)^2\big((n-k)!\big)^2 - a_{k-1}a_{k+1}(k-1)!(n-k+1)!(k+1)!(n-k-1)!$$
   d'où l'ultra-log-concavité voulue en divisant par $(n!)^2$.

Sujet 1.18

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant d}$ par les relations suivantes :

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in [\![1, d]\!],\ P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1)) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Donner la matrice de Δ dans la base canonique $\left(1, X, X^2, \dots, X^d\right)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Établir que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Exprimer la matrice de Δ dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Soit $n \in [\![0, d]\!]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P_n(k) \in \mathbb{Z}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$.
   Exprimer, $\forall k \in [\![0, d]\!]$, $\Delta^k(P)(0)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $(P_0, \dots, P_d)$.
5. Montrer que : $[\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}]$ si et seulement si $[\forall k \in [\![0, d]\!], P(k) \in \mathbb{Z}]$.

Solution du sujet 1.18

On pose $E = \mathbb{R}_d[X]$.

1. (a) Pour $P \in E$, $P(X+1) \in E$ donc $\Delta(P) \in E$.
Pour $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$.

   (b) Si $0 \leqslant k \leqslant d$, $\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} 1^{k-i} X^i$ donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{d}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \binom{d}{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) La famille $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ est échelonnée en degrés, donc est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

   (b) $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$ et si $n \in [\![0, d-1]\!]$,
$\Delta(P_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}[(X+1)X\cdots(X-(n-1)) - X(X-1)\dots(X-n)]$
donc $\Delta(P_{n+1}) \frac{(X+1)-(X-n)}{(n+1)!} X(X-1)\dots(X-(n-1)) = P_n$
d'où la matrice de Δ dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$, matrice formée de 0 avec seulement une sur-diagonale formée de 1.

3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n(k) = 0$,
et pour $k \geqslant n$, on a $P_n(k) = \dfrac{1}{n!} k(k-1)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$.
Si $k \geqslant 1$, $P_n(-k) = \frac{(-1)^n}{n!}(k)(k+1)\dots(k+n-1) = \frac{(-1)^n (k+n-1)!}{n!(k-1)!} = (-1)^n \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$.

4. L'application Δ est linéaire donc Δ^k est linéaire donc $\Delta^k(P) = p_0 \Delta^k(P_0) + p_1 \Delta^k(P_1) + \dots + p_d \Delta^k(P_d)$.
Or $\Delta(P_0) = 0$ et si $n \in [\![0, d-1]\!]$, $\Delta(P_{n+1}) = P_n$ donc $\Delta^k(P_i) = 0$ si $i < k$ et $\Delta^k(P_i) = P_{i-k}$ sinon.
On en déduit que $\Delta^k(P) = p_k P_0 + p_{k+1} P_1 + \dots + p_d P_{d-k}$ donc $\boxed{\Delta^k(P)(0) = p_k.}$

5. Le sens direct est immédiat.
Réciproquement, supposons $\forall j \in [\![0, d]\!]$, $P(j) \in \mathbb{Z}$.
Alors pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, on a a $p_i = \Delta^i(P)(0) = \sum\limits_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} (-1)^{i-j} P(j) \in \mathbb{Z}$.
Soit $p_i \in \mathbb{Z}$. Donc $P(k) = p_0 P_0(k) + p_1 P_1(k) + \dots + p_d P_d(k) \in \mathbb{Z}$.

CHAPITRE

2

ANALYSE

Sujet 2.1

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K.

2. Déterminer l'ensemble D des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$ converge.

   On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$.

3. Déterminer le sens de variation de F sur D.

On admet que la fonction F est dérivable sur D et qu'elle vérifie

$$\forall x \in D\,, \qquad x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) = -K\,.$$

Pour tout $x \in D$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

4. Justifier qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D\,, \qquad G(x) = C - K \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

5. Déterminer la limite de G en $+\infty$, et en déduire une relation entre C et K.
6. (a) Prouver la convergence et calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

   (on pourra utiliser le changement de variable $u : t \to \sqrt{t}$ après l'avoir justifié).

   (b) Soit $x \in D$. Prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

   (c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\right] = 0\,.$$

   (d) En déduire la limite de G en 0, puis la valeur de C.

7. En déduire la valeur de K.

Solution du sujet 2.1

1. $\varphi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-1/2}$ et $\varphi(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$; donc K converge.
2.
   - $f_x : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $x \geqslant 0$;
   - pour $x = 0$, $f_0(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-3/2}$ d'intégrale divergente ;
   - pour $x > 0$, $f_x(u) \underset{0^+}{\sim} \frac{\varphi(u)}{x}$ d'intégrale convergente, $f_x(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$, donc $F(x)$ converge.

   Ainsi et $D = \mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(u)$ décroissante, donc F aussi.
4. La fonction G est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, d'après la relation admise,
$$G'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,F(x) - \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right] = -K\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$
   Les fonctions G et $H : x \mapsto -K\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$ (bien définie car φ a une intégrale convergente en 0^+) ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y diffèrent d'une constante.
5. La fonction F est décroissante, positive et a une limite finie en $+\infty$, donc $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   D'autre part, par convergence de K, $G(x) = C - K\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2$; d'où $C = K^2$.
6. (a) Le changement de variables $t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe C^1 bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. L'intégrale demandée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi$ sont de même nature et égales. Donc $J = \pi$.

   (b) Par changement de variables $u \mapsto u/x = t$ (pour $x > 0$) on obtient
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$$
   donc l'intégrale converge.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de J, il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Par continuité de exp en 0,
$$\exists \eta > 0\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\quad 0 \leqslant u \leqslant \eta \implies |\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$
   Alors, pour tout $x \in [0, \eta/A]$,
$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\ - J\right| \leqslant \int_0^A \frac{|\mathrm{e}^{-tx} - 1|}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\,J + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   d'où la différence des intégrales tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

   (d) D'après c)
$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} J$$
   D'autre part, $\lim\limits_{0^+} G = C$ car l'intégrale de φ converge en 0 ; d'où $C = \pi$.
7. D'après 5, $K = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$.

Sujet 2.2

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   En utilisant le changement de variable $u = t^2/2$, que l'on justifiera, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K, et calculer sa valeur.

2. (a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série de terme général $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge.

   Pour $x \in D$, on note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in D$,

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

   (c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad U_n = S_n - 2\sqrt{n}\,.$$

   (a) Prouver que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (on pourra étudier $U_{n+1} - U_n$).

   (b) Justifier que pour tout $x \in D$ la série de terme général $S_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge.
   On note alors $h(x)$ sa somme.

On admet que si $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_k a_{n,k}$ converge (on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$),
- la série $\displaystyle\sum_n A_n$ converge

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$ existe et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$.

   (c) Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in D$.

   (d) En déduire un équivalent de $h(x)$ quand $x \to 0^+$.

4. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$ et en trouver un équivalent quand $x \to 0^+$.

Solution du sujet 2.2

1. Par changement de variable $t \mapsto t^2/2 = u$ et densité de la loi normale,
$$K = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$
NB : le théorème de changement de variable donne la convergence de l'intégrale.

2. (a) Si $x < 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge ; si $x = 0$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ; si $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge (absolument) ; et $D = \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Par décroissance de $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$ (pour tout $x > 0$) comme produit de fonctions décroissantes positives (ou étude de fonction), et convergence de la série, donc des intégrales, on obtient
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$
   (c) Le changement de variables $u \mapsto u\,x = t$ (pour $x > 0$) donne
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
   d'où par encadrement $\sqrt{x}\,f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} K = \sqrt{\pi}$, soit $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.

3. (a) On a par quantités conjuguées
$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4\,n^{3/2}}$$
   de signe constant et terme général de série convergente ; donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers L).
   (b) Ainsi, $S_n - 2\sqrt{n} \to L = \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)$, donne $S_n \sim 2\sqrt{n}$ puis $S_n\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et la série converge.
   (c) Pour $x > 0$, par la permutation admise, après en avoir vérifié les conditions,
$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right] = \frac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$
   (d) D'après 2.c) et 3.c), $h(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

4. Pour $x > 0$, on a $\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$, donc la série converge.

   On pose $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.
   La suite convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par M), donc
$$\left|h(x) - 2\,g(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} U_n\,\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \frac{M\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{M}{x} = \mathrm{o}\left(h(x)\right) \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{h(x)}{2} \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}$$

Sujet 2.3

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0,1]$.
   (a) Montrer que, $\forall t>0$, $(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t)+(1-\lambda)g(t)$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant 1$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et $\lambda\in[0,1]$.
   En utilisant la question précédente, montrer que :
$$\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)^\lambda\left(\int_0^{+\infty} g(t)dt\right)^{1-\lambda}$$
3. (a) On rappelle que : $\forall\, x>0,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$. Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$.
   On définit alors la fonction G sur $]0,+\infty[$ par $G : x\mapsto \ln(\Gamma(x))$.
   (b) Établir que pour tout $\lambda\in[0,1]$ et $\forall (x,y)\in]0,+\infty[^2$ on a :
$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant (\Gamma(x))^\lambda(\Gamma(y))^{1-\lambda}$$
   Que peut-on en déduire pour la fonction G ?
4. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $G(x+1)\leqslant \left(1-\dfrac{1}{y}\right)G(x)+\dfrac{1}{y}G(x+y)$.
   (b) En déduire que $\Gamma(x+y)\geqslant x^y\Gamma(x)$.
5. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y\leqslant 1$. Montrer que :
$$\Gamma(x+y)\leqslant x^y\Gamma(x)$$

Solution du sujet 2.3

1. (a) Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in \,]0;+\infty[$, $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$ par concavité du ln. En posant $x = f(t)$ et $y = g(t)$, les fonctions étant à valeurs strictement positives sur $]0;+\infty[$, et en passant à l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

   (b) D'après l'inégalité précédente, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt$ étant convergente par linéarité, on a par comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt = 1$ d'après les hypothèses.

2. Posons, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}$ (le dénominateur étant non nul car l'intégrale est strictement positive) et $\psi(t) = \dfrac{g(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t}$. φ et ψ vérifient les hypothèse de la question précédente.

   D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\varphi(t))^{\lambda}(\psi(t))^{1-\lambda}dt$ converge et est inférieure ou égale à 1, d'où la conclusion par linéarité.

3. (a) $\forall x > 0, \Gamma(x) > 0$ par stricte positivité (à justifier avec le programme).

   (b) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t})^{\lambda}(t^{y-1}e^{-t})^{1-\lambda}\mathrm{d}t$, ce qui est inférieur d'après la question 2 à $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}$. On en déduit que G est convexe.

4. (a) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+1) = (1-\frac{1}{y})x + \frac{1}{y}(x+y)$, d'où le résultat par convexité.

   (b) $\forall x \in]0,+\infty[, G(x+1) = G(x) + \ln(x)$, d'où, par la question précédente, $\frac{1}{y}G(x+y) \geqslant \ln(x) + \frac{1}{y}G(x)$, c'est à dire $G(x+y) \geqslant y\ln(x) + G(x)$. En prenant l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

5. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+y) = \lambda x + (1-\lambda)(x+1)$ $(x+y \in [x,x+1])$ avec $\lambda = 1-y \in [0,1]$.
   D'où : $G(x+y) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x+1) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x) + y\ln(x) \leqslant G(x) + y\ln(x)$, d'où le résultat.

Sujet 2.4

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$ est convergente.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$$

2. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = \frac{2}{n+1} \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

   (b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie u_n à l'appel de `u(n)` .

```python
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=---
    else:
        u=---
        for k in range(---):
                u=---
    return u
```

   où la boucle `for k in range(2,n+1,2):` fait prendre à `k` des valeurs de `2` (inclus) à `n+1` (exclu) avec un pas de `2` , soit : `2,4,6,8,...`

   (c) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, on a $u_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}$, et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on a $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

4. (a) Pour tout réel x et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k}$.

   (b) Établir la relation :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

   (c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.

   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Solution du sujet 2.4

1. La fonction intégrée est continue sur $]0, \pi/2]$.
   En 0, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}\right| \underset{x\to 0}{\sim} n$; donc l'intégrale proposée est faussement impropre en 0.

2. On trouve $u_0 = 0, u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\mathrm{d}x = 2$.

3. (a) On sait que $\sin((n+2)x) = \sin((n+1)x)\cos(x) + \sin(x)\cos((n+1)x)$
   et $\sin(nx) = \sin((n+1)x)\cos(x) - \sin(x)\cos((n+1)x)$.
   Donc $\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2\cos((n+1)x)\sin(x)$. Donc, par linéarité de l'intégration

$$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2\cos((n+1)x)\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

   (b) On peut proposer (attention au décalage) :

```python
import numpy as np
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    else:
        u=np.pi/2
        for k in range(3,n+1,2):
                  u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    return u
```

   (c) D'après 3.a), on a, $u_{2p+3} - u_{2p+1} = \frac{1}{p+1}\sin((p+1)\pi) = 0$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p+1} = u_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$u_{2p+2} = u_{2p} + \frac{2}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = u_{2p} + \frac{2\times(-1)^p}{2p+1} \Rightarrow u_{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4. (a) Pour tout réel x, on a $-x^2 \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k} = \frac{1-\left(-x^2\right)^p}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^{p+1}x^{2p}}{1+x^2}$.

   (b) En intégrant cette relation sur $[0,1]$ (fonctions continues), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Par décroissance sur $[0,1]$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a : $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.
   En multipliant par $x^{2p} \geqslant 0$ et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2p+1}$,
   et par encadrement $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
   En peut passer à la limite dans 4. b), on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (d) Pour finir, $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}$,
   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Sujet 2.5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge.

On suppose de plus que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

On pose enfin, pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ et $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

2. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante.
   Montrer que sa réciproque F^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante.

On admettra que F_1 vérifie aussi ces propriétés.

3. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

   (b) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante .

4. (a) Après avoir justifié l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (b) Soit $A = \max(0, \varphi^{-1}(0))$.
   Montrer que $\forall x \geqslant A$, $\displaystyle\int_{x}^{x+1} \varphi(u)^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \geqslant \varphi(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$.

   (c) En déduire que : $|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{4}}\right)$.

Solution du sujet 2.5

1. la fonction $g : u \longmapsto f(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus : $\forall u \in \mathbb{R}, 0 < g(u) \leqslant 4e^{-\frac{u^2}{4}}$.
   Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} du$ converge (par exemple en utilisant la loi $\mathcal{N}(0,2)$).

2. Comme g est positive sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du$ converge, $F(x)$ existe pour tout x de $\mathbb{R}$.

   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x g(t)dt$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = g(x) > 0$. Ainsi F est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
   D'après le cours, F^{-1} est aussi strictement croissante de $]0, \sqrt{2\pi}[$ dans $\mathbb{R}$.
   Comme F' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, F^{-1} est dérivable (et donc continue)sur $]0, \sqrt{2\pi}[$ et pour tout x de $]0, \sqrt{2\pi}[$,

   $$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'[F^{-1}(x)]} = \frac{1}{g[F^{-1}(x)]} = \frac{1}{f \circ F^{-1}(x) \times e^{-\frac{(F^{-1}(x))^2}{2}}}$$

   Donc $(F^{-1})' > 0$ et est continue (théorèmes généraux).

3. (a) On veut $F \circ \varphi = F_1$. Donc φ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi = F^{-1} \circ F_1$.
   (b) Par composée, φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

4. (a) Convergence classique, soit par les intégrales de Riemann, soit en utilisant la loi $\mathcal{N}(0,2)$.

   $$F(\varphi(x)) = F_1(x) \Rightarrow F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

   soit

   $$\varphi^2(x)f(\varphi(x))e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}}\varphi'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Donc, en posant le changement de variable $u = \varphi(x)$, il vient

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   (b) Soit $x \geqslant A$. On a donc $x \geqslant 0$ et $x \geqslant \varphi^{-1}(0)$.
   Soit $u \in [x, x+1], 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(u) \leqslant \varphi(x+1)$ car φ est strictement croissante.
   Donc $0 \leqslant \varphi(x)^2 \leqslant \varphi(u)^2$ et $e^{-\frac{u^2}{2}} \geqslant e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$ donc $e^{-\frac{u^2}{2}}\varphi(u)^2 \geqslant e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\varphi(x)^2$.
   On intègre sur $[x, x+1]$ ce qui donne le résultat souhaité.

   (c) Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x+1} \varphi(u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$.
   Donc par d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi^2(x)e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} |\varphi(x)|e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = 0$.
   D'où $|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\frac{(x+1)^2}{4}}\right)$.

Sujet 2.6

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i \right) dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{3n} = \dfrac{1}{2n+1}$, $v_{3n+1} = \dfrac{-1}{4n+2}$, $v_{3n+2} = \dfrac{-1}{4n+4}$ et $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i$.

5. Montrer la suite (T_{3n+2}) converge et préciser sa limite.
6. En déduire que la série $\sum v_n$ converge et préciser la somme de cette série.

On considère désormais une suite (a_n) de réels **positifs** et φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_{\varphi(n)}$.

7. Montrer que la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum b_n$ converge et que si la série $\sum a_n$ converge alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.
8. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$?

Solution du sujet 2.6

1. On a $|u_n| = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$ et la série harmonique diverge.

2.
   - $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2}$ donc (S_{2n}) est décroissante.
   - (S_{2n+1}) est croissante
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc convergent et ont même limite donc (S_n) converge donc la série $\sum u_n$ converge.

3. Soit $t \in [0,1]$. On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$,

   Donc
   $$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i\right) dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4. Enfin $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^i \, dt = \ln(2) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

5. Soit $a_n = v_{3n} + v_{3n+1} + v_{3n+2} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right)$.

   On a $T_{3n+2} = \sum\limits_{i=0}^{3n+2} v_{3n} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2i+1} - \dfrac{1}{2i+2}\right) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=0}^{2n+1} \dfrac{(-1)^i}{i+1} = \dfrac{1}{2} S_{2n+1} \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \ln(2)$.

6. On a $T_{3n} = T_{3n+2} - (v_{3n+1} + v_{3n+2})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \dfrac{1}{2} \ln(2)$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+1} = \dfrac{1}{2} \ln(2)$ donc la série $\sum v_n$ converge et a pour somme $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

7. Supposons que $\sum a_n$ converge et posons $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ et $\sigma'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)}$ Soit $N = \max\{\varphi(i), i \in [\![0,n]\!]\}$.

   On a $\sigma'_n \leqslant \sigma_N \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ car $a_n \geqslant 0$.

   La suite (σ'_n) est donc majorée donc $\sum b_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   On a $a_n = b_{\varphi^{-1}(n)}$ donc si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

8. Utilisons la question 6. On a $v_{3n} = u_{2n}$, $v_{3n+1} = u_{4n+1}$ et $v_{3n+2} = u_{4n+3}$.
   Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(3n) = 2n$, $\varphi(3n+1) = 4n+1$ et $\varphi(3n+2) = 4n+3$. φ est bijective car atteint tous les pairs et tous les impairs exactement une fois.
   On a $v_n = u_{\varphi(n)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc le résultat précédent ne subsiste pas si la série n'est pas à terme positifs.

Sujet 2.7

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite.

3. (a) Justifier les inégalités suivantes :
   $$\forall n \geqslant 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4, \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}dt.$$
   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente ; on note S sa limite.

4. Le but de cette question est de calculer la valeur de S en fonction de γ.
   Pour $n \geqslant 3$, on pose $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$ et $a_n = t_n - \dfrac{(\ln(n))^2}{2}$.
   (a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3, S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) \ln(2)$.
   En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et de $\ln(2)$. Déterminer S.

Solution du sujet 2.7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_1$.
   Ainsi la suite (u_n) admet une limite si et seulement si la série télescopique converge.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}+\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2}.$$
   D'où la convergence de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$, par comparaison de séries signe constant (ou par convergence absolue) avec un série de Riemann. D'après la question 1 la suite converge donc.
3. (a) La fonction $h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$ car $h'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$. Ainsi :
   $$\forall n \geqslant 3,\ \forall t \in [n,n+1],\ \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4,\ \forall t \in [n-1,n],\ \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{\ln(t)}{t}.$$
   D'où les inégalités demandées en intégrant ces inégalités respectivement sur $[n,n+1]$ et $[n-1,n]$.

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n+2}-S_{2n} = \dfrac{\ln(2n+2)}{n+2} - \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = h(2n+2)-h(2n+1) \leqslant 0$
   car la fonction h est décroissante sur $[3,+\infty[$, donc la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   De même, pour tout $n \geqslant 1, S_{2n+3}-S_{2n+1} = -\dfrac{\ln(2n+3}{2n+3} + \dfrac{\ln(2n+2)}{2n+2} = h(2n+2)-h(2n+3) \geqslant 0$
   donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   Enfin, pour tout $n \geqslant 1, S_{2n+2}-S_{2n+1} = \dfrac{\ln(2n+2)}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+2})_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes : on en déduit qu'elles sont convergentes de même limite S, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est elle-même convergente de limite S.
4. (a) On a $a_{n+1}-a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\right) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant 0$,
   d'après Q3b (seconde inégalité), donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   D'après Q3b (première inégalité) et en sommant pour k allant de 3 à n, on a
   $$t_n = \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k} \geqslant \frac{\ln(2)}{2}+\int_3^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{\ln(2)}{2}+\int_3^{n}\frac{\ln(t)}{t}\,dt = \ln(2)+\frac{1}{2}((\ln(n))^2-(\ln(3))^2)$$
   d'où $\forall n \geqslant 3,\ a_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$.
   La suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante et minorée, donc convergente (th. de la limite monotone).

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$ $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$ d'où
   $$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - t_{2n}.$$
   En scindant la première somme, on a donc $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\ln(2)$.
   En remplaçant par les expressions des suites (a_n) et (u_n), on obtient
   $S_{2n} = (u_n+\ln(n))\ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$ puis $S_{2n} = u_n\ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

   (c) En passant à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S = \gamma\ln(2) - \dfrac{(\ln(2))^2}{2}$.

Sujet 2.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2^n \mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^n}$.

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; en déduire que $F_2 = 1$.

   (b) À l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$, montrer que $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de F_n et montrer que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} F_n$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite (F_n).

   (c) Exprimer F_{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, soient $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n \sqrt{n}}{n! \mathrm{e}^n}\right)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{2(n-1)}$ $(n \geqslant 2)$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \times \frac{1}{2x^2}\, \mathrm{d}x$; on la notera I_n.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

4. Déduire des questions 1 et 2 que $F_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} F_n$, puis que $F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \dfrac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Solution du sujet 2.8

1. (a) On a : $\displaystyle\int_0^X \frac{4\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \left[\ \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\ \right]_0^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, car : $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1$. Soit $\boxed{F_2 = 1.}$

   (b) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, donc
$$F_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{u\left(u+\frac{1}{u}\right)} = \left[\ 2\arctan\ \right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$

2. (a) Pour tout $X>0$, par intégration par parties sur le segment $[0,X]$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on a :
$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{2^{n+2}\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+2}} &= \left[\ \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})} \times \frac{2^n}{((\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}))^n}\ \right]_0^X - \int_0^X \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \times \left(-\frac{n2^n(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\frac{2^n(\mathrm{e}^X-\mathrm{e}^{-X})}{(\mathrm{e}^X+\mathrm{e}^{-X})^{n+1}}}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0} - n\int_0^X \frac{2^{n+2}\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+2}} + n\int_0^X \frac{2^n\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^n}.\end{aligned}$$
   (On a utilisé la relation $(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2 = (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2 - 4$). D'où la convergence de F_n par récurrence double sur $n \geqslant 1$. Et $\boxed{F_{n+2} = \frac{n}{n+1}F_n.}$

   (b) On a $(\mathrm{e}^x-1)^2 \geqslant 0 \iff \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant 1$. Donc, par croissance de l'intégration $\boxed{(F_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) On a $\displaystyle F_{2n+1} = F_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \boxed{\frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.}$

3. (a) $\displaystyle I_n = \int_n^{n+1} -\frac{1}{2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{x} - \frac{n(n+1)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2} + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln|x| + \frac{n(n+1)}{2x}\right]_n^{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln n) - 1.$

   Or, par $\boxed{\text{croissance de l'intégration}}$: $\displaystyle 0 \leqslant I_n \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}.$

   (b) Comme $v_n - u_n = \dfrac{1}{2(n-1)}$, il est clair que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.}$
$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}\right) - \ln\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = I_n \geqslant 0,$$
   d'après la question précédente. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

   Et $\boxed{(v_n) \text{ décroissante}}$ car : $\displaystyle v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n-1)} \leqslant I_n - \frac{1}{2n^2} \leqslant 0,$

4. On a $F_n > 0$ (l'intégrale d'une fonction continue positive n'est nulle que si la fonction est nulle), donc $\displaystyle \frac{n}{n+1} \underset{\text{Q2a}}{=} \frac{F_{n+2}}{F_n} \underset{\text{Q2b}}{\leqslant} \frac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 1$. Par $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ on en déduit que $\boxed{F_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} F_n.}$

   Or, d'après Q2.b on a $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$, suite constante qui vaut $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (cf. Q1).

   D'où : $\dfrac{\pi}{2} = nF_{n+1}F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(F_n)^2$, comme $F_n \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

5. D'après Q3b, (u_n) [et (v_n)] converge vers une limite ℓ_0, donc $\mathrm{e}^{u_n} \to \mathrm{e}^{\ell_0} = \ell \neq 0$, soit $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{n}}{\ell\mathrm{e}^n}.}$

   Donc : $\displaystyle \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \overset{\text{Q4}}{\underset{n\to+\infty}{\sim}} F_{2n+1} \underset{\text{Q2c}}{=} \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{\ell\mathrm{e}^{2n}}}{2^{2n}\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{\ell\mathrm{e}^n}\right)^2} = \frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$. D'où $\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$

Sujet 2.9

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$. On la note J_n.
2. Calculer J_0.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $J_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}$.
4. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et convergente.

On aborde maintenant deux manières différentes d'obtenir la limite ℓ de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. *Méthode 1 :*
   (a) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right)$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
6. *Méthode 2 :*
   (a) Montrer l'existence d'une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $J_{n+1} \leqslant M \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
   Indication : on pourra exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$ *à l'aide de* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$*, puis découper cette dernière intégrale en deux autour de la borne* $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

Solution du sujet 2.9

1. On a : $|e^{-x}\sin^{2n}x| \leqslant e^{-x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge,
   Donc, par théorème de comparaison, l'intégrale J_n converge absolument.
2. $J_0 = 1$ (intégrale de la densité de la loi exponentielle de paramètre 1).
3. Pour tout $A > 0$, par intégration par parties avec des fonctions de classe C^1, on a :

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{2n} t\ dt = \left[-e^{-t}\sin^{2n} t\right]_0^A + 2n\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\ dt$$

   d'où, lorsque A tend vers l'infini : $J_n = 2n\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\ dt$. On intègre de nouveau par parties :

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\ dt = \left[-e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t\cos^2 t - \sin^{2n} t)\ dt$$

   puis, quand A tend vers l'infini : $J_n = 2n\big((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n\big)$, soit $J_n = \dfrac{2n(2n-1)}{1+4n^2}J_{n-1}$.
4. On a $J_0 > 0$ et $\dfrac{2n(2n-1)}{1+4n^2} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Par récurrence sur $n \geqslant 0$ évidente, la question précédente donne $J_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
   De plus $\dfrac{J_n}{J_{n-1}} = \dfrac{4n^2-2n}{4n^2+1} \leqslant 1$, donc la suite (J_n) est décroissante ; comme elle est minorée, elle converge.
5. (a) On a : $v_n = \ln\left(\dfrac{4n^2-2n}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1+2n}{1+4n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1+2n}{1+4n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.
   Ainsi, la série à termes positifs $\sum -v_n$ $\boxed{\text{diverge}}$ par théorème de comparaison ; donc $\sum v_n$ aussi.

   (b) Il s'ensuit que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ tendent vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

   Or, d'après les questions 2 et 3, on a : $J_n = 1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}$,

   Donc, $\ln(J_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$
6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, par changement de variable affine, on a $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n+2} t\,dt = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi}\sin^{2n+2} u\,du$.
   Donc, par relation de Chasles, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n+2} t\ dt = \sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n+2} t\ dt = \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{-u-k\pi}\right)\sin^{2n+2} u\ du$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-e^{-(N+1)\pi}}{1-e^{-\pi}} e^{-u}\sin^{2n+2} u\ du \leqslant M\int_0^{\pi}\sin^{2n} u\ du \text{ avec } M = \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

   car $\sin^{2n+2} u \geqslant 0$, $e^{-u} \leqslant 1$ et $e^{-(N+1)\pi} \geqslant 0$.
   D'où le résultat voulu par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$.

   (b) Par relation de Chasles puis changements de variables affines, puis Chasles encore, on a :

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n} u\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} u\,du = 2\int_0^{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}\cos^{2n} u\,du + 2\int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} u\,du \leqslant \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n}.$$

Or $\ln\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n} = 2n\ln\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\times -\dfrac{1}{2n^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to}{\longrightarrow} -\infty$, donc : $\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par encadrement , on retrouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Sujet 2.10

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. On la note I_n.
   (b) Sans faire de calcul de primitive, donner les valeurs des intégrales I_0, I_1 et I_2.
   (c) Que dire de I_3 ? Calculer I_4.
2. Montrer que pour tous réels x et y la convergence de $\displaystyle\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. On appelle $G(x,y)$ cette intégrale.
   Exprimer $G(x,y)$ sans signe intégral, en fonction de x et y.
3. Déterminer les extrémums locaux et globaux de la fonction G.

Solution du sujet 2.10

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   On a $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to \pm\infty}{=} o(1/t^2)$. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ entraîne celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t$ aussi.
   Il en va de même pour la borne $-\infty$ (ou bien par parité ou imparité de f_n selon n).
   Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.

   (b) On sait que si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$, alors $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}$ est une densité de f.

   De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = 1$, on déduit $I_0 = \sqrt{\pi}$. De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t = E(X) = 0$, on déduit $I_1 = 0$.

   De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) \mathrm{d}t = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + 0 = \frac{1}{2}$, on déduit $I_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (c) Par imparité $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$.

   Pour I_4, par int. par parties avec $u(t) = t^3$ et $v'(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$ qui sont C^1, il vient $I_4 = \dfrac{3}{2} I_2 = 3\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+y^2+4xy)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$.
   par linéarité pour les intégrales convergentes, grâce aux questions précédentes, il vient immédiatement que $G(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et que :

$$G(x,y) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \big(I_4 - 0 + (x^2+y^2+4xy) I_2 + 0 + x^2y^2 I_0 \big) = 4x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 8xy + 3.$$

3. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale. Déterminons les points critiques de G.
   On a $\nabla G(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 4x + 8y \\ 8x^2y + 4y + 8x \end{pmatrix}$. Et

$$\begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2x^2y + y + 2x = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2xy(x-y) + (x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ (x-y)(2xy+1) = 0 \end{cases}.$$

   1^er cas : $y = x$. Alors $2x^3 + 3x = 0$. Un seul point critique de ce type $O(0,0)$.
   2^e cas : $y \neq x$, alors $2xy = -1$ puis $-y + x + 2y = 0$, soit $y = -x$ et $2x^2 = 1$.
   Ainsi, $\boxed{G \text{ possède trois points critiques } O = (0,0),\ A = \big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) \text{ et } B = \big(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\big).}$

   Comme on a $G(x, y) = G(y, x)$ pour tout x, y, on en déduit que A et B sont de même nature.

   - Étude du point $O(0,0)$. On a donc $H_G(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $-48 < 0$.

     Donc $O(0,0)$ est un point col et $\boxed{G \text{ n'a pas d'extrémum local en } (0,0).}$

   - Étude du point $A\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big)$ (idem en B) On a $H_G\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ de valeur propre double 8.

     On a $8 > 0$, donc $\boxed{G \text{ présente un minimum local en } A \text{ de valeur } G\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) = 2.}$

   Comme il n'y a pas de maximum local, $\boxed{\text{il n'y a pas non plus de maximum global.}}$
   Si G admet un minimum global, alors il est atteint en A et B et il vaut 2.
   Or pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G(x, y) - 2 - 2(x+y)^2 = 4x^2y^2 + 4xy + 1 = (2xy+1)^2 \geqslant 0$.
   On en déduit que $G(x, y) \geqslant 2 + 2(x+y)^2 \geqslant 2$.
   Ainsi, $\boxed{2 \text{ est bien le minimum global de } G \text{ et il est atteint en } A \text{ et } B.}$

SUJET 2.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
   (a) Si t est un réel strictement positif , montrer que
   $$\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + (nt - 1) - \int_{\frac{1}{n}}^{t} \frac{t-s}{s^2} ds.$$
   (b) En déduire l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant n \ln(\frac{1}{n})$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ pour lequel il y a égalité dans l'inégalité précédente.
2. Dans cette question, on suppose seulement que $y_1, \cdots, y_n$ sont n réels strictement positifs ($n \geqslant 1$).
   (a) À l'aide de la question 1.(b), montrer que
   $$\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k. \qquad (1)$$
   (b) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité (1)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge.

3. On introduit la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ définie par $\alpha_k = \dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$ et on pose $v_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$.
   (a) Calculer le produit $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n$ et montrer que la suite $\left(\dfrac{\alpha_k}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est croissante.
   (*On pourra considérer les points* $y_1 = 1$, $y_2 = \cdots = y_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{k}$ *et utiliser l'inégalité (1)*).
   Déterminer la limite de cette suite.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, prouver que
   $$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right] \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \sum_{p=1}^{N} u_p.$$
   (*Pour* $\ell \geqslant 1$, *on pourra utiliser l'égalité* $\dfrac{1}{\ell(\ell+1)} = \dfrac{1}{\ell} - \dfrac{1}{\ell+1}$).
4. On considère la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ où $s_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
   (a) Montrer que la série de terme général s_n est divergente.
   (b) Prouver que la série de terme général v_n est convergente et que l'on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Solution du sujet 2.11

1. (a) Par calcul : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{t} \frac{t-s}{s^2} ds = \left[-\frac{t}{s} - \ln s\right]_{s=\frac{1}{n}}^{s=t} = \cdots$ ou avec Taylor reste intégral.

   (b) Comme $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$, avec la question précédente on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = n\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left[(nx_k - 1) - \int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds\right] = n\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds\right] \leqslant n\ln\left(\frac{1}{n}\right),$$

   car toutes les intégrales sont positives (quelle que soit la position de x_k par rapport à $\frac{1}{n}$).

   (c) D'après ce qui précède, l'égalité est équivalente à $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   Or ceci n'est possible que si $x_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Sinon il y a une intégrande continue, de signe constant et qui ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration non réduit à un singleton, ce qui interdit à l'intégrale correspondante d'être nulle.

2. (a) Comme ln est strict. croissante cela revient à montrer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(y_k) \leqslant \ln(y_1 + \cdots + y_n) + \ln(\frac{1}{n})$,

   soit encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n}\right) \leqslant n\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.
   C'est vrai d'après la question 1.b car les $x_k = \frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n}$ en vérifient les hypothèses

   (b) Le cas d'égalité dans l'inégalité se produit si et seulement si on est dans le cas d'égalité avec les x_k pour l'inégalité (1), c'est à dire que $x_k = \frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n} = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   On observe alors que c'est équivalent au fait que $y_1 = \cdots = y_n$.

3. (a) On trouve $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (n+1)^n$. Posons $e_k = \dfrac{\alpha_k}{k} = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$.
   Avec l'indication et l'inégalité (1), on obtient

$$(y_1 \times \cdots \times y_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} \leqslant \frac{1}{k+1}\left(1 + k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \frac{1}{k+1}$$

   d'où $e_k \leqslant e_{k+1}$. De plus, $e_k = \exp(1 + o(1)) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow}$ e.

   (b) Avec l'inégalité (1) et la question précédente, il vient

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k u_k}{\alpha_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k u_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]\alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right)\alpha_k u_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} e_k u_k \leqslant e_N \sum_{k=1}^{N} u_k.$$

4. (a) La série de terme général s_n est clairement divergente puisque $s_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$ avec $u_1 > 0$.

   (b) Avec les questions 3. (a) et 3. (b), on voit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{N} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Les deux séries sont à termes positifs, la convergence de la série de terme général v_n résulte du théorème de comparaison puisque $\sum u_n$ est convergente. Un passage à la limite donne l'inégalité souhaitée.

SUJET 2.12

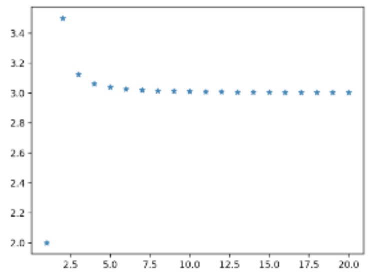
On considère deux réels a et b, $a > 0$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence :

$$u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{a}{n}\right) + b \qquad (R)$$

1. On suppose dans cette question que $b = 0$ et on pose $r = \lfloor a \rfloor + 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant r+1$, $u_n = u_r \displaystyle\prod_{k=r}^{n-1}\left(1 - \frac{a}{k}\right)$.
   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant r} \ln\left(1 - \frac{a}{k}\right)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. Dans cette question, on suppose que $a = 1/2, b = 9/2$ et $u_1 = 2$.
   On rappelle que `range(1,n+1)` crée la ligne des nombres de `1` à `n`.
   On exécute le programme Python suivant :

```python
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
n=20 ; a=0.5 ; b=4.5 ; u1=2
u=np.zeros(n); v=np.zeros(n) ; u[0]=u1 ; v[0]=u1
for k in range(1,n):
    u[k]=u[k-1]*(1-a/k)+b
    v[k]=u[k]-u[k-1]
plt.plot(range(1,n+1),v,'*')
plt.show()
```

   et l'on obtient :



   Quelle conjecture peut-on faire ?
3. On revient maintenant au cas général.
   (a) Déterminer l'unique réel α tel que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence (R).
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - n\alpha) = 0$. La conjecture formulée précédemment est-elle vraie ?
4. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence : $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) + b_n \qquad (R')$
   (a) On suppose que $b = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + (n - n_0)\varepsilon$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
   (b) On suppose b non nul. En considérant la suite $(u_n - n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$.

Solution du sujet 2.12

1. (a) On procède par récurrence sur $n \geqslant r+1$. Si $n = r+1$, $u_{r+1} = u_r\left(1 - \frac{a}{r}\right) = u_r \prod_{k=r}^{r}\left(1 - \frac{a}{k}\right)$ donc la propriété est vraie au rang $r+1$.
On la suppose vraie au rang n.
On a $u_{n+1} = u_n(1 - \frac{a}{n}) = \left(u_r \prod_{k=r}^{n-1}\left(1 - \frac{a}{k}\right)\right) \times (1 - \frac{a}{n}) = u_r \prod_{k=r}^{n}\left(1 - \frac{a}{k}\right)$, CQFD.

   (b) $\ln(1 - a/k) \sim -a/k$ quand $k \to +\infty$. D'où par équivalence, $\sum_{k \geqslant 1} - \ln(1 - a/k)$ diverge vers $+\infty$ étant donné que $-\ln(1 - a/k) \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant r$, d'où le résultat.
On a alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=r}^{n} \ln(1 - a/k) = -\infty$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=r}^{n}\left(1 - \frac{a}{k}\right) = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. On conjecture, grâce au graphe, que $\lim_{n \to +\infty}(u_{n+1} - u_n) = 3$.

3. (a) On cherche α tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(n+1) = \alpha n(1 - \frac{a}{n}) + b$ soit $\alpha = -a\alpha + b$ i.e. $\alpha = \dfrac{b}{a+1}$.

   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - n\alpha$. Alors on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n(1 - a/n)$. La suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie les hypothèses vérifiées par la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dans la question 1, d'où on a bien $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

   Pour la conjecture, $a = 1/2$, $b = 9/2$ d'où $\alpha = \dfrac{b}{1+a} = 3$ et

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{(u_{n+1} - 3(n+1))}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty} - \underbrace{(u_n - 3n)}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty} + 3$$

   d'où on a bien $u_{n+1} - u_n \to 3$ quand $n \to +\infty$.

4. (a) Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|b_n| \leqslant \varepsilon$ et $|1 - a_n/n| < 1$ (car $0 < \frac{a_n}{n} \sim \frac{a}{n}$).
On a alors $|u_{n+1}| \leqslant |u_n| + \varepsilon$. Par récurrence sur $n \geqslant n_0$ ou par télescopage

$$|u_{n+1}| \leqslant |u_n| + \varepsilon \leqslant |u_{n_0}| + (n - n_0)\varepsilon + \varepsilon$$

   ou $|u_{n+1}| \leqslant |u_{n_0}| + (n + 1 - n_0)\varepsilon$.
D'où, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{|u_n|}{n} \leqslant \dfrac{|u_{n_0}|}{n} + \dfrac{n - n_0}{n}\varepsilon$.
Il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\dfrac{|u_{n_0}|}{n} \leqslant \varepsilon$ donc $\dfrac{|u_n|}{n} \leqslant 2\varepsilon$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{|u_n|}{n} = 0$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - (n+1)\alpha = u_n\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) + b_n - n\alpha\left(1 - \frac{a}{n}\right) - b = (u_n - n\alpha)\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) + \underbrace{\alpha(a - a_n) + b_n - b}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$$

   On est ramené à la question précédente pour la suite $(u_n - n\alpha)_{n \geqslant 1}$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_n - n\alpha}{n} = 0$ i.e. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = \alpha$.

SUJET 2.13

Soit $p \geqslant 2$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa norme euclidienne canonique : si $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2\right)^{1/2}$.
On note I l'intervalle d'entiers $I = [\![1, p]\!]$ et on note $D = \{(i, i) \mid i \in I\}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 \left(1 - x_k^2\right) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant p} \left[(x_k + x_l - 1)^2 - x_k^2 x_l^2\right] = \|x\|^2 - \|x\|^4 + \sum_{(k,l) \in I^2 \setminus D} (x_k + x_l - 1)^2.$$

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 2$.
   (a) Expliciter $f(x_1, x_2)$.
   (b) Justifier le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que pour $k \in \{1, 2\}$, on a
   $$\partial_k f(x_1, x_2) = 2x_k - 4x_k \|x\|^2 + 4(x_1 + x_2 - 1).$$
2. On revient au cas général où $p \geqslant 2$.
   (a) Trouver une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$(u + v - 1)^2 \leqslant a \left(u^2 + v^2 + 1\right)$$
   (b) En déduire qu'il existe trois constantes strictement positives b, c et d telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on ait $f(x) \leqslant b\|x\|^2 - c\|x\|^4 + d$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel r strictement positif tel que $f(x) \leqslant f(p - 1, 0, \cdots, 0) - 1$ pour tout x tel que $\|x\| > r$.
   (d) Déterminer le gradient de f en tout point x de $\mathbb{R}^p$
3. On considère $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_1 + \cdots + x_p = p - 1\}$.
   (a) Montrer que f possède un maximum global M sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_p = p - 1$ et que si y est un point de $\mathcal{H}$ tel que $M = f(y)$ alors $\|y\| < r$.
   (b) Simplifier l'expression du gradient de f au point x lorsque $x \in \mathcal{H}$. Si y est un point de $\mathcal{H}$ tel que $M = f(y)$, donner une condition nécessaire vérifiée par les composantes de y.
   (c) Si $x \in \mathcal{H}$, montrer que $(p - 1)^2 \leqslant p\|x\|^2$. Prouver que $\left\{\|x\|^2 \mid x \in \mathcal{H}\right\} = \left[\frac{(p-1)^2}{p}, +\infty\right[$ *(Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pourra considérer $m_t = m + t(1, -1, 0, \cdots, 0)$ où m est un point bien choisi de $\mathcal{H}$).*
   (d) Déterminer M. Est-il un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$?

Solution du sujet 2.13

1. (a) On voit que f est donnée par $f(x_1,x_2)=\left(x_1^2+x_2^2\right)-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+2\left(x_1+x_2-1\right)^2$.

   (b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^p$ car c'est une fonction polynomiale de plusieurs variables. Il vient directement de 1. (a) que pour $k\in\{1,2\}$, on a

$$\partial_k f(x_1,x_2)=2x_k-4x_k(x_1^2+x_2^2-1)+4(x_1+x_2-1)=2x_k-4x_k\|x\|^2+4(x_1+x_2-1).$$

2. (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs $(u,v,-1)$ et $(1,1,1)$, il suffit de prendre $a=3$.

   (b) Avec la question précédente, on voit que

$$f(x)\leqslant\|x\|^2-\|x\|^4+3\sum_{(k,l)\in I^2\setminus D}(x_k^2+x_l^2+1)\leqslant(3(p^2-p)+1)\|x\|^2-\|x\|^4+3(p^2-p),$$

   On peut donc prendre $b=3(p^2-p)+1$, $c=1$ et $d=3(p^2-p)$.

   (c) Immédiat d'après la question précédente puisque $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} b\|x\|^2-c\|x\|^4+d=-\infty$.

   (d) Si $(e_1,\cdots,e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et si $x\in\mathbb{R}^p$, alors $\nabla f(x)$ est égal à

$$2\sum_{i=1}^{p}\left[x_i-2x_i\|x\|^2+2\sum_{k\neq i}(x_k+x_i-1)\right]e_i=2\sum_{i=1}^{p}\left[x_i\left(2p-3-2\|x\|^2\right)+2\sum_{k=1}^{p}x_k-2(p-1)\right]e_i.$$

3. (a) On justifie facilement que $\mathcal{H}\cap\overline{B}(0,r]$ est un fermé borné. La fonction f est continue sur cet ensemble fermé et borné, elle admet donc un maximum sur $\mathcal{H}\cap\overline{B}(0,r]$, qui est en fait un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$ sous la contrainte $x_1+\cdots+x_p=p-1$ en vertu de la question précédente puisque le point $(p-1,0,\cdots,0)$ appartient à $\mathcal{H}$. La dernière assertion est une conséquence directe de q2.

   (b) La seconde expression de ∇f en 2 (d) donne, pour $x\in\mathcal{H}$: $\nabla f(x)=2\sum\limits_{i=1}^{p}\left[x_i\left(2p-3-2\|x\|^2\right)\right]e_i$.

   Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est une fonction polynomiale de p variables, le cours nous dit que nécessairement $\nabla f(y)\in\mathrm{Vect}((1,\cdots,1))$ *i.e.* $y_1\left(2p-3-2\|y\|^2\right)=\cdots=y_p\left(2p-3-2\|y\|^2\right)$.

   (c) L'inégalité s'obtient avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prenons $m=\left(\dfrac{(p-1)}{p},\cdots,\dfrac{(p-1)}{p}\right)$, alors on a $m_t\in\mathcal{H}$, $\|m_t\|^2=\|m\|^2+2t^2=\dfrac{(p-1)^2}{p}+2t^2\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $\|m_0\|^2=\dfrac{(p-1)^2}{p}$.
   Avec l'inégalité, ces deux choses et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure.

   (d) Soit $y\in\mathcal{H}$ tel que $f(y)=M$. Si $\|y\|^2\neq\dfrac{2p-3}{2}$, avec 3. (c) on a alors $y_1=\cdots=y_p$, d'où $y=(\left(\dfrac{(p-1)}{p},\cdots,\dfrac{(p-1)}{p}\right))$ et $f(y)=\dfrac{p-1}{p^2}$ (On a bien $\|y\|^2\neq\dfrac{2p-3}{2}$). On observe que le cas où $y\in\mathcal{H}$ est tel $\|y\|^2=\dfrac{2p-3}{2}$ est possible d'après 3. (d) puisque $\dfrac{2p-3}{2}\geqslant\dfrac{(p-1)^2}{p}$ $(p\geqslant 2)$. Si $y\in\mathcal{H}$ et est de ce type, on trouve

$$f(y)=\frac{2p-3}{2}-\frac{(2p-3)^2}{4}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}(y_k+y_l-1)^2-\sum_{k=1}^{p}(2y_k-1)^2=\frac{(2p-3)^2}{4}-p^2+3p-2=\frac{1}{4}.$$

   Or $\dfrac{p-1}{p^2}\leqslant\dfrac{1}{4}$, il en résulte que $M=\dfrac{1}{4}$. Ce n'est pas un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$ (qui existe par un raisonnement analogue à celui de 3. (b)) car $f(0)=p^2-p>\dfrac{1}{4}$.

Sujet 2.14

1. On dit qu'une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, est à variation lente si pour tout réel $c > 0$, on a :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1.$$
   (a) Les fonctions constantes de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$ sont-elles à variation lente ?
   (b) Montrer que la fonction logarithme népérien est à variation lente.
   (c) Montrer que si une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, avec $\ell \neq 0$, alors elle est à variation lente. Qu'en est-il si $\ell = 0$?

Dans la suite, X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, strictement positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On note F la fonction de répartition de X et on pose, pour tout réel x : $G(x) = 1 - F(x)$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n positif ou nul tel que $G(u_n) = \frac{1}{n}$.
   (b) Donner la valeur de u_1.
3. Soit λ un réel strictement positif. Donner l'expression de u_n en fonction de n et λ lorsque X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

4. On revient au cas général.
   On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ et une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$, à variation lente, vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = \frac{h(x)}{x^a}$$
   On suppose également que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $P(X > xu_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx^a}$
   (b) Soit une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   Déterminer, pour tout réel $x > 0$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{M_n}{u_n} > x\right)$.

Solution du sujet 2.14

1. (a) Si h est constante non nulle, il existe un réel $K \neq 0$ tel que $h(x) = h(cx) = K$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = 1$.

   (b) Si h est la fonction ln, comme c et x sont strictement positifs, on a $\ln(cx) = \ln(c) + \ln(x)$ et ainsi : $\frac{h(cx)}{h(x)} = \frac{\ln(c)}{\ln(x)} + 1$. On conclut sans problème que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = 1$.

   (c) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors, comme $c > 0$, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(cx) = \ell$.
   Comme $\ell \neq 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.
   Si $\ell = 0$, le résultat ne subsiste pas. Il suffit par exemple de considérer la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ pour laquelle on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = \dfrac{1}{c}$, ce qui est différent de 1 dès que $c \neq 1$.
   Une autre fonction avec laquelle le résultat ne subsiste pas est $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

2. (a) La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ tout comme F (car X est à densité). De plus, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$(sa dérivée est strictement positive par hypothèse) donc G décroît strictement sur $\mathbb{R}_+$. Comme X a une densité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a $F(0) = 0$ donc $G(0) = 1$ et on a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 1 = 0$.
   La fonction G réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel $\frac{1}{n}$ appartient à $]0,1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel u_n positif ou nul tel que $G(u_n) = \frac{1}{n}$.

   (b) Comme $G(u_1) = 1$, on a $F(u_1) = 0$ et comme u_1 appartient à $\mathbb{R}_+$, on trouve $u_1 = 0$.

3. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda), u_n$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{1}{n}$ et on trouve $u_n = \frac{\ln(n)}{\lambda}$.

4. (a) Comme h est à variation lente, on a :

$$P(X > xu_n) = G(xu_n) = \frac{h(xu_n)}{(xu_n)^a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{h(u_n)}{(xu_n)^a} \;(\text{car}\, G(u_n) \neq 0 \text{ donc } h(u_n) \neq 0)$$

   Pour finir, on a $\frac{h(u_n)}{(xu_n)^a} = \frac{h(u_n)}{{u_n}^a x^a} = \frac{1}{x^a} G(u_n) = \frac{1}{x^a} \times \frac{1}{n}$.
   On obtient donc bien : $\mathbb{P}(x > xu_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx^a}$.

   (b) Comme $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, on montre que :

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant xu_n) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant xu_n] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant xu_n])$$

   Par indépendance, on obtient $\mathbb{P}(M_n \leqslant xu_n) = F(xu_n)^n$ et on trouve ainsi :

$$\mathbb{P}(M_n > xu_n) = 1 - F(xu_n)^n$$

   D'après 4. a), on a $\mathbb{P}(X > xu_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où : $F(xu_n)^n \underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.
   De plus, on a

$$\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

   Comme $n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^a}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^a} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{x^a}$ et par continuité de l'exponentielle en $-\frac{1}{x^a}$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} F(xu_n)^n = \exp\left(\dfrac{-1}{x^a}\right)$.
   On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{M_n}{u_n} > x\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M_n > xu_n) = 1 - \exp\left(\dfrac{-1}{x^a}\right)$.

CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet 3.1

Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la différence $x - \lfloor x \rfloor$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes à valeurs dans $[0, 1[$, qui suivent la loi uniforme sur cet intervalle.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ puis de $\lfloor X + Y \rfloor$ et calculer l'espérance $E\big(\lfloor X + Y \rfloor\big)$.
2. Déterminer la loi de $\{X + Y\}$.

   On considère une suite $(X_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi que X.

   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

3. (a) Écrire une fonction Python `simulPE2S_n(n)` qui réalise la simulation de $\lfloor S_n \rfloor$.

   (b) On exécute le programme suivant

```python
y = np.zeros(10)
for n in range(1,11):
        esp = 0
        for k in range(10000):
                    esp += simulPE2S_n(10*n)
                    y[n-1] = esp/10000
print(y)
```

   qui affiche `[ 4.5009 9.5047 14.4965 19.4956 24.464 29.5111 34.4629 39.4877 44.4961 49.4689]`
   En admettant que $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$ est une fonction affine de n, faire une conjecture sur cette espérance.

4. (a) Établir que pour tout entier n et tout x réel, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

   (b) Montrer que pour tout x réel et $y \in [0, 1[$, $\{x + y\} = \{\{x\} + y\}$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\{S_n\}$ puis $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$.
6. (a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   (b) En déduire que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\lfloor S_n \rfloor}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

Solution du sujet 3.1

1. $X+Y$ est à valeurs dans $[0,2[$ et une densité de $X+Y$ est h, définie par, $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f_X(x-t)\mathrm{d}t$$
Or $f_X(x-t)=1$ si $x-t\in[0,1]$, 0 sinon. D'où :
$$h(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0 \text{ ou } x>2\\ x \text{ si } x\in[0,1]\\ 2-x \text{ si } x\in\,]1,2]\end{cases}$$
$\lfloor X+Y\rfloor(\Omega)\subset\{0,1\}$ et $P(\lfloor X+Y\rfloor=0)=P(X+Y\in[0,1[)=P(X+Y<1)=\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.
Donc $P(\lfloor X+Y\rfloor=1)=\frac12$ aussi, d'où $\lfloor X+Y\rfloor\rightsquigarrow\mathcal{B}(\frac12)$, et $E(\lfloor X+Y\rfloor)=\frac12$.
2. On utilise le SCE $\Big(\lfloor X+Y\rfloor=0,\lfloor X+Y\rfloor=1\Big)$. Si $x\in[0;1[$,
$$\begin{aligned}P(\{X+Y\}\leqslant x)&=P\Big((\{X+Y\}\leqslant x)\cap(\lfloor X+Y\rfloor=0)\Big)+P\Big((\{X+Y\}\leqslant x)\cap(\lfloor X+Y\rfloor=1)\Big)\\&=P(0\leqslant X+Y\leqslant x)+P(1\leqslant X+Y\leqslant 1+x)=\int_0^x t\mathrm{d}t+\int_1^{1+x}(2-t)\mathrm{d}t=x.\end{aligned}$$
Si $x<0$, $P(\{X+Y\}\leqslant x)=0$, et si $x\geqslant 1, P(\{X+Y\}\leqslant x)=1$. D'où $\{X+Y\}\rightsquigarrow\mathcal{U}([0;1[)$.
3. (a)
```python
import numpy.random as rd, numpy as np
def simulPE2S_n(n):
        S=0
        for k in range(n):
                S+=rd.random()
        return np.floor(S)
        #ou S=sum(rd.random(n))

```
   (b) On conjecture que $E(\lfloor S_n\rfloor)$ est égal à $\frac{n-1}{2}$.
4. (a) On a : $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$, d'où $n+\lfloor x\rfloor\leqslant n+x<(n+\lfloor x\rfloor)+1$.
   (b) $\{x+y\}=\{\lfloor x\rfloor+\{x\}+y\}=\lfloor x\rfloor+\{x\}+y-\lfloor\lfloor x\rfloor+\{x\}+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\{x\}+y-\lfloor x\rfloor-\lfloor\{x\}+y\rfloor=\{\{x\}+y\}$
5. On montre par récurrence sur n que $\{S_n\}\rightsquigarrow\mathcal{U}([0;1[)$. Pour $n=2$, c'est la question 2.
Pour l'hérédité : $\{S_{n+1}\}=\{S_n+X_{n+1}\}=\{\{S_n\}+X_{n+1}\}$, avec $\{S_n\}\rightsquigarrow\mathcal{U}([0;1[)$ et $X_{n+1}\rightsquigarrow\mathcal{U}([0;1[)$, les deux variables étant indépendantes. On applique la question 2.
De plus, $S_n=\lfloor S_n\rfloor+\{S_n\}$, d'où par linéarité : $E(\lfloor S_n\rfloor)=E(S_n)-E(\{S_n\})=\frac{n}{2}-\frac12=\frac{n-1}{2}$.
6. (a) $\forall\varepsilon>0, P(\frac{\{S_n\}}{n}\geqslant\varepsilon)=P(\{S_n\})\geqslant n\varepsilon)=0$ si $n\varepsilon>1$, donc pour n assez grand. D'où le résultat.
   (b) La suite $\left(-\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers 0,
   et la loi faible des grands nombres montre que $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers $\frac12$,
   d'où puisque $\frac{\lfloor S_n\rfloor}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{\{S_n\}}{n}$, $\frac{\lfloor S_n\rfloor}{n}$ converge en probabilité vers $\frac12$.

Sujet 3.2

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si A est un événement de cet espace, on note 1_A la variable indicatrice de l'événement A.
- X est une variable à valeurs positives admettant **une espérance non nulle**. On note F sa fonction de répartition.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes à valeurs positives suivant toutes la même loi que X.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ et F_n la fonction de répartition de S_n.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $t > 0$, on note $N_t(\omega)$ le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $S_n(\omega) > t$.
  On admet que N_t est une variable aléatoire.
- Pour tout $t > 0$, on note $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$ lorsque cette espérance existe.

1. Soit $t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. On suppose dans cette question seulement que X suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Écrire une fonction Python `N(t)` qui réalise une simulation de la variable N_t (la fonction `exponential(1)` de la bibliothèque `random` de `numpy` simule la loi $\mathcal{E}(1)$).
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}dx - \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}dx$.
   (c) En déduire la loi de N_t, l'existence de $M(t)$ et sa valeur.

On revient au cas général.

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > a) > 0$. On note alors $p = \mathbb{P}(X > a)$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{e}^{-X} \leqslant \exp\left(-a1_{[X>a]}\right)$. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant 1 - p(1 - \mathrm{e}^{-a})$.
   (b) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ F_n(t) \leqslant \mathrm{e}^t \left[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X})\right]^{n+1}$$
5. Montrer que $M(t)$ est défini pour tout $t > 0$ et que : $M(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$.

Solution du sujet 3.2

1. $(N_t = n)$ est réalisé si et seulement si $(S_n > t)$ est réalisé et $(S_{n-1} \leqslant t)$ aussi, c'est à dire $(S_n > t) \cap \overline{(S_{n-1} > t)} = (S_n > t) \setminus (S_{n-1} > t)$. D'où $P(N_t = n) = P(S_n > t) - P(S_{n-1} > t)$ car $(S_{n-1} > t) \subset (S_n > t)$. Ainsi, $P(N_t = n) = (1 - F_n(t)) - (1 - F_{n-1}(t)) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. (a)

```python
import numpy.random as rd
def N(t):
        s=0
        n=0
        while s<=t:
                s=s+rd.exponential(1)
                n+=1
        return n

```

   (b) On a $S_{n-1} \rightsquigarrow \gamma(n)$, d'où, pour $t > 0$, $F_{n-1}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathrm{d}x$.
   De même $F_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x$, d'où le résultat par la question 1.

   (c) On intègre par parties $F_{n-1}(t)$, et on obtient : $P(N_t = n) = \dfrac{t^n}{n!} e^{-t}$, d'où $N_t \rightsquigarrow \mathcal{P}(t)$.
   Ainsi $E(N_t) = t$.
3. Comme X est positive, on a $P(X \leqslant 0) = P(X = 0)$; donc $P(X \leqslant 0) < 1$, puisque sinon on aurait $E(X) = 0$, ce qui est absurde.
   De plus, $[X \leqslant 0] = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[X \leqslant \frac{1}{n}\right]$, d'où, par décroissance, $P([X \leqslant 0]) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(\left[X \leqslant \frac{1}{n}\right])$.
   Ainsi : $\exists k \in \mathbb{N}^*, P(\left[X \leqslant \frac{1}{k}\right]) < 1$, d'où $P(X > \frac{1}{k}) > 0$.
4. (a) La variable X est positive, d'où $X \geqslant a\mathbf{1}_{[X>a]}$ par disjonction des cas $[X > a]$ et $[X \leqslant a]$.
   D'où $-X \leqslant -a\mathbf{1}_{[X>a]}$ et on compose par l'exponentielle. D'où l'existence de l'espérance, et :
$$E(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant E(\exp(-a\mathbf{1}_{[X>a]})) = P(X > a)e^{-a} + P(X \leqslant a) = pe^{-a} + 1 - p = 1 - p(1 - e^{-a}).$$
   (b) L'espérance $E(e^{-S_n})$ existe et vaut $\left(E(e^{-X})\right)^{n+1}$ car $e^{-S_n} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{-X_k}$.
   D'où d'après Markov :
$$F_n(t) = P(S_n \leqslant t) = P(e^{-S_n} \geqslant e^{-t}) \leqslant \frac{E(e^{-X})^{n+1}}{e^{-t}}.$$
5. D'après la question 1 cela revient à étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n(F_{n-1}(t) - F_n(t))$.
   On sépare la somme partielle en deux et on réindexe :
$$\sum_{n=1}^{N} n(F_{n-1}(t) - F_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} nF_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) - NF_N(t).$$
   L'inégalité de la question 4b montre que $NF_N(t)$ tend vers 0, et que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} F_k(t)$ converge par comparaison à une série géométrique, d'où la conclusion.

Sujet 3.3

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit un réel $q \geqslant 2$. Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre q.

1. On pose $X = q^N$. Montrer que X admet des moments $\mathbb{E}(X^m)$ à tout ordre $m \in \mathbb{N}$ et les calculer.

On pose $c_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-q^k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n! c_n$.

2. Montrer que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire une majoration de la suite $(|a_n|)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |c_{n+1}x^{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|c_n x^n|$.
   (b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$; on note $f(x)$ sa somme.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $f(qx) = (1-x)f(x)$.
5. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)} = 0$.
6. Montrer l'existence d'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(U = n) = \mathbb{P}(N = n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right).$$
7. On pose $Y = q^U$. Les variables X et Y ont-elles la même loi ?
8. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X^m) = \mathbb{E}(Y^m)$.

Solution du sujet 3.3

1. Par $\boxed{\text{théorème de transfert,}}$ on a :

$$E(X^m) = \mathbb{E}(q^{mN}) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathrm{e}^{-q}\frac{q^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(q^{m+1})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\times \mathrm{e}^{q^{m+1}} = \mathrm{e}^{q^{m+1}-q}.$$

2. Comme $q \geqslant 2$, on a $1-q^k<0$, donc :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n+1}{q^{n+1}-1} = \frac{n+1}{(q-1)(1+q+\cdots+q^n)} \leqslant \frac{n+1}{1\times(1+1+\cdots+1)} = 1.$$

   Ainsi $(|a_n|)$ est décroissante, donc : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant |a_0| = 1.}$

3. (a) Si $x=0$ c'est évident, sinon, comme $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \dfrac{|x|}{q^{n+1}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

   par définition de la limite, il existe n_0 tel que $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant n_0$.

   (b) Par récurrence évidente sur $n \geqslant n_0$, on en déduit que : $|c_nx^n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}|c_{n_0}x^{n_0}|$.
   Par comparaison avec une série géométrique convergente, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$.

4. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) = f(x)-xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty}c_{n-1}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n-c_{n-1})x^n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{n-1}\left(\frac{1}{1-q^n}-1\right)x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}c_nq^nx^n = f(qx).\end{aligned}$$

5. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_nq^{n(m+1)} = f(q^{m+1})$. Montrons par récurrence sur $m \geqslant 0$, la relation : $f(q^{m+1})=0$.
   - C'est vrai si $m=0$, en prenant $x=1$ dans la question précédente : $f(q)=(1-1)f(1)=0$
   - Si c'est vrai à l'ordre m, alors en prenant $x=q^{m+1}$ dans la question précédente, on a : $f(q^{m+2}) = (1-q^{m+1})f(q^{m+1}) = 0$, donc c'est vrai à l'ordre $m+1$.

6. La suite $\left(\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive car $|a_n| \leqslant 1$. Et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)a_n \\ &= 1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^n = 1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}c_nq^n = 1,\end{aligned}$$

   d'après la question 5, avec $m=0$.

7. Les variables N et U n'ont pas la même loi puisque $\frac{a_n}{2} \neq 0$, donc $X=q^N$ et $Y=q^U$ n'ont pas la même loi non plus, puisque la fonction $t \mapsto q^t$ est injective sur $\mathbb{R}_+$.

8. Par théorème de transfert, par un calcul analogue à celui de Q6, on a :

$$\begin{aligned}E(Y^m) = \mathbb{E}(q^{mU}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}q^{mn}\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}q^{mn}\mathbb{P}(N=n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}q^{mn}P(N=n)a_n \\ &= \mathbb{E}(X^m) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^{n(m+1)} = \mathbb{E}(X^m)+0,\ \text{d'après Q5.}\end{aligned}$$

Sujet 3.4

Soit $p \in]0,1]$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler la formule donnant $\mathbb{P}(X_1 = k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geqslant n+1$, $\displaystyle\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si} \quad k \geqslant n, \\ \\ 0 & \text{si} \quad k < n \end{cases}$$

Dans la suite, **on admet** que si l'on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} x^j$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{j=n}^{+\infty} j(j-1)\cdots(j-n+1)x^{j-n} = f^{(n)}(x).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, bornée et à dérivée bornée.
Soit N un majorant de $|f'|$ et M un majorant de $|f|$.

4. Dans cette question on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.
   (b) En déduire que la série : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.

Pour tout $x \in]0,1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$K_{f,n}(x) = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k.$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'existence de $\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ et comparer cette espérance à $K_{f,n}(p)$.
6. Soit ε un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{K}{n}$ où K est une constante à déterminer.
   (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant N.\varepsilon + M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(K_{f,n}(p))$.

Solution du sujet 3.4

1. Pour $k=0$, on $\mathbb{P}(X_1=k)=0$ et pour tout $k\geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X_1=k)=p(1-p)^{k-1}$.
2. Pour n fixé, par récurrence sur k à l'aide la formule du triangle de Pascal.
3. Par récurrence sur $n\geqslant 1$. Initialisation immédiate. Supposons l'égalité vraie au rang n :
   Pour $k<n+1$, on a $\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=0$, car $X_k(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Si $k\geqslant n+1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\mathbb{P}(S_n+X_{n+1}=k)&=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(\{S_n=i\}\cap\{X_{n+1}=k-i\})\\&=\sum_{i=n}^{k-1}\mathbb{P}(S_n=i)\times\mathbb{P}(X_{n+1}=k-i),\ \text{(indépendance et support des variables)}\\&=\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}p^n(1-p)^{i-n}\times p(1-p)^{k-i-1},\ \text{(hypothèse de récurrence)}\\&=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\binom{k-1}{n},\ \text{(d'après 2)}\end{aligned}$$

4. (a) Comme $1-x\in]-1,1[$, après décalage d'indice, la formule admise donne la convergence de la série — et sa somme $(n-1)!f^{(n)}(1-x)$.
   (b) La valeur absolue du terme général de la série est majorée par $\sup|f|\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$.
   Donc la série est absolument convergente.
5. Comme f est bornée sur $[1,+\infty[$, l'espérance de $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ existe. Par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)&=\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{k=n}^{+\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{n+k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=n+k)b\\&\overset{Q.3}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{n-1}p^n(1-p)^k=K_{f,n}(p)\end{aligned}$$

6. (a) Les variables $(X_k)_{k\geqslant n}$ ont une espérance (qui est $\frac{1}{p}$) et une variance (qui est $\frac{q}{p^2}$).
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet donc de conclure que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{q}{np^2\varepsilon^2}$.
   (b) Par inégalité des accroissements (avec $|f'|\leqslant N$) : $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leqslant N\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|$ $(\star)$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|&\leqslant\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon}\right)\\&\leqslant\mathbb{E}\left(N\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\ \text{(l'inégalité triangulaire et }(\star))\\&\leqslant\mathbb{E}\left(N\varepsilon\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\leqslant N\varepsilon+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\end{aligned}$$

   (c) Au final, pour tout $n\geqslant 1$ on a : $|K_{n,f}(p)-f\left(\frac{1}{p}\right)|\leqslant N\varepsilon+\frac{2M}{np^2\varepsilon^2}$.
   Pour n assez grand le deuxième terme est majoré par ε. Donc le premier membres est aussi petit que l'on veut pour n assez grand. Ainsi $(K_{f,n}(p))_n$ converge vers $f\left(\frac{1}{p}\right)$.

Sujet 3.5

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace admettant une espérance.

On dit qu'une variable aléatoire X est sous-gaussienne si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(\mathrm{e}^{tX})$ existe et s'il existe $\theta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{e}^{\theta^2 t^2}$$

1. Montrer que si X suit une loi normale centrée alors elle est sous-gaussienne.

2. Montrer que si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, elle n'est pas sous gaussienne.

On suppose que X est sous-gaussienne et que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables de même loi que X, ces variables étant toutes définies sur le même espace probabilisé.On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \max(|X_1|, ..., |X_n|)$.

3. Montrer que pour tout $t > 0$, $X \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{tX} - 1}{t}$. En déduire que $E(X) \leqslant 0$ puis que $E(X) = 0$.
4. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tZ_n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-tX_k}$.

   (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(\mathrm{e}^{tZ_n})$ existe et vérifie :

$$E(\mathrm{e}^{tZ_n}) \leqslant 2n\mathrm{e}^{\theta^2 t^2}$$

5. (a) Montrer que $E(Z_n)$ existe et que pour tout t réel, $E(\mathrm{e}^{tZ_n}) \geqslant \mathrm{e}^{tE(Z_n)}$.

   (b) En déduire que tout tout $t > 0$, $E(Z_n) \leqslant \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$.

   (c) En conclure que $E(Z_n) \leqslant 2\theta\sqrt{\ln(2n)}$.

Solution du sujet 3.5

1. $E(e^{tX})$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{tx}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge, ce qui est le cas seulement si $\lambda > t$.
   Donc X n'est pas sous-gaussienne.
2. $E(e^{tX})$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ converge.
   Or $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2\sigma^2} + tx = -\frac{1}{2}\left((\frac{x}{\sigma})^2 - 2tx\right) = -\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma} - \sigma t)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$.
   D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma}-\sigma t)^2}\mathrm{d}x$ converge.
   Le changement de variable $u = \frac{x}{\sigma} - \sigma t$ nous ramène à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$, qui converge d'après le cours.
   D'où $E(e^{tX})$ existe pour tout réel t et vaut $e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. $\theta = \sigma^2/2$ convient pour prouver que X est sous-gaussienne.
3. Par convexité de la fonction exponentielle, on a : $e^x \geqslant 1 + x$, pour $x \in \mathbb{R}$, d'où $e^{tX} \geqslant 1 + tX$,
   soit $e^{tX} - 1 \geqslant tX$, et avec $t > 0$, $\dfrac{e^{tX} - 1}{t} \geqslant X$. D'où $\dfrac{E(e^{tX}) - 1}{t} \geqslant E(X)$, puis $\dfrac{e^{\theta^2 t^2} - 1}{t} \geqslant E(X)$.
   Or $\dfrac{e^{\theta^2 t^2} - 1}{t}$ est équivalent à $\theta^2 t$ lorsque t tend vers 0, d'où, en passant à la limite : $0 \geqslant E(X)$.
   De plus, $-X$ est aussi sous-gaussienne, doù $0 \geqslant -E(X)$, c'est à dire $E(X) \geqslant 0$. On a donc : $E(X) = 0$.
4. (a) $\forall \omega \in \Omega, \exists i : Z_n(\omega) = |X_i(\omega)| = X_i(\omega)$ ou $-X_i(\omega)$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}, tZ_n(\omega) = tX_i(\omega)$ ou $-tX_i(\omega)$.
   Ainsi $e^{tZ_n(\omega)} \leqslant e^{tX_i(\omega)} + e^{-tX_i(\omega)}$ et a fortiori $e^{tZ_n(\omega)} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{tX_k(\omega)} + \sum_{k=1}^{n} e^{-tX_k(\omega)}$.

   (b) Par domination, $E(e^{tZ_n})$ existe et $E(e^{tZ_n}) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(e^{tX_k}) + \sum_{k=1}^{n} E(e^{-tX_k}) \leqslant 2ne^{\theta^2 t^2}$.
5. (a) On a, pour $t > 0$, $0 \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{e^{tZ_n} - 1}{t}$, d'où $E(Z_n)$ existe. De plus, par convexité de $x \mapsto e^{tx}$:
   $$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tx} \geqslant e^{tE(Z_n)} + te^{tE(Z_n)}(x - E(Z_n)),$$
   ainsi $e^{tZ_n} \geqslant e^{tE(Z_n)} + te^{tE(Z_n)}(Z_n - E(Z_n))$, on prend l'espérance, et on obtient : $E(e^{tZ_n}) \geqslant e^{tE(Z_n)}$.

   (b) D'après ce qui précède, on a : $e^{tE(Z_n)} \leqslant 2ne^{\theta^2 t^2}$,
   donc : $tE(Z_n) \leqslant \ln(2n) + \theta^2 t^2$, c'est à dire $E(Z_n) \leqslant \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$.

   (c) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$ a pour dérivée $t \mapsto -\dfrac{\ln(2n)}{t^2} + \theta^2$.
   Donc elle admet un minimum sur $]0; +\infty[$ atteint en $t = \frac{\sqrt{\ln(2n)}}{\theta}$ qui vaut $2\theta\sqrt{\ln(2n)}$.

Sujet 3.6

Soient p et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui prend ses valeurs dans $I = [\![1, p]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $x_k = \mathbb{P}([X = k])$ et on suppose que $x_k \in]0, 1[$.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ qui sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes la même loi que X.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, on introduit l'ensemble $E(\omega) = \{X_1(\omega)\} \cup \cdots \cup \{X_n(\omega)\}$
(ensemble dont les éléments sont les nombres $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ — pas forcément distincts).

1. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on introduit la variable aléatoire Y_k définie, par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in E(\omega) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Déterminer la loi de Y_k en fonction de x_k. De quel type de loi s'agit-il ?
   (b) Donner l'espérance et la variance de Y_k.

2. Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega)$ est le nombre d'éléments de $E(\omega)$ (c.a.d. $Z(\omega) = \text{card}(E(\omega))$).
   (a) Exprimer Z en fonction des variables $Y_1, \cdots, Y_p$.
   (b) Calculer l'espérance de Z.
   (c) Soient k et l deux entiers distincts appartenant à $[\![1, p]\!]$.
   Que vaut la covariance de Y_k et Y_l en fonction de x_k et x_l ?
   (d) Déterminer la variance de Z.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^p$ par : $f(t_1, \cdots, t_p) = p - \sum_{k=1}^{p} (1 - t_k)^n$.
   On pose $\mathcal{K} = [0, 1]^p$, $\mathcal{O} =]0, 1[^p$ et $\mathcal{C} = \left\{ t \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^{p} t_k = 1 \right\}$.
   (a) Justifier l'existence d'un maximum global de f sur $\mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ que l'on notera M.
   (b) Prouver que si u est un point de $\mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ tel que $M = f(u)$, alors u appartient nécessairement à $\mathcal{O} \cap \mathcal{C}$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point $u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ tel que $M = f(u)$. Déterminer la valeur de M.
   (d) Quelle est la loi que doit suivre X pour maximiser l'espérance de Z ?

4. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui sont définies sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la même loi que X donnée dans le préambule de l'exercice. Pour $n \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire Z_n telle que $Z_n(\omega)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{X_1(\omega)\} \cup \cdots \cup \{X_n(\omega)\}$ pour $\omega \in \Omega$. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers une variable certaine.

Solution du sujet 3.6

1. (a) La variable Y_k prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k=1)=1-\mathbb{P}(Y_k=0)=1-(1-x_k)^n$, la variable Y_k suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-x_k)^n$.
   (b) Il s'agit d'une variable de Bernoulli, le cours nous dit alors que : $\mathbb{E}(Y_k)=1-(1-x_k)^n$ et que $\mathbb{V}(Y_k)=[1-(1-x_k)^n](1-x_k)^n$.
2. (a) Il est clair que $Z=Y_1+\cdots+Y_p$.
   (b) Par linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(Y_1)+\cdots+E(Y_p)=p-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(1-x_k)^n$.
   (c) Comme k et ℓ sont distincts, la variable Y_kY_ℓ est une variable de Bernoulli de paramètre

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_kY_\ell=1)\\ =&1-\mathbb{P}(Y_kY_\ell=0)=1-\mathbb{P}([Y_k=0]\cup[Y_\ell=0])=1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+\mathbb{P}([Y_k=0]\cap[Y_\ell=0])\\ =&1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\notin\{k,\ell\}]\right)=1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+(1-x_k-x_\ell)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où }\ \mathrm{Cov}(Y_k,Y_l)&=\mathbb{E}(YkY_\ell)-\mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_\ell)\ \text{(f. de Koenig-Huygens)}\\ &=1-(1-x_k)^n-(1-x_l)^n+(1-x_k-x_l)^n-[1-(1-x_k)^n][1-(1-x_l)^n]\\ &=(1-x_k-x_l)^n-(1-x_k)^n(1-x_l)^n.\end{aligned}$$

   (d) Avec la bilinéarité de la covariance et les questions 1. (b), 2. (a) et 2. (c), il vient

$$\mathbb{V}(Z)=\mathrm{Cov}(Z,Z)=\sum_{k=1}^{p}[1-(1-x_k)^n](1-x_k)^n+\sum_{(k,l)\in[\![1,p]\!]^2;k\neq\ell}[(1-x_k-x_l)^n-(1-x_k)^n(1-x_l)^n]$$

3. (a) Comme la fonction f est continue sur le fermé borné $\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$, elle y admet un maximum global M.
   (b) Supposons que u n'appartient pas $\mathcal{O}\cap\mathcal{C}$, alors il existe $\ell\in[\![1,p]\!]$ tel que $u_\ell\in\{0,1\}$, par symétrie on peut considérer que $\ell=1$.
   Si $u_1=1$, alors comme $u\in\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$, on doit avoir $u_2=\cdots=u_p=0$. On considère la fonction h_1 sur $[0,1]$ définie par $h_1(t)=f(1-t,t,0,\cdots,0)$, on a $h_1(0)=M\geqslant h_2(t)$ et on voit facilement que h_1 est strictement croissante sur $[0,\dfrac{1}{2}[$, ce qui est absurde. On raisonne de la même manière lorsque $u_1=0$ en remarquant que l'on peut maintenant supposer que $u_2\in]0,1[$ et on introduit la fonction h_0 sur $[0,u_2]$, où $h_0(t)=f(t,u_2-t,u_3,\cdots,u_p)$, qui est strictement croissante sur $[0,\dfrac{u_2}{2}[$, ce qui conduit à une contradiction. On a donc bien $u\in\mathcal{O}\cap\mathcal{C}$.
   (c) Si $f(u)=M$, on a vu que $u\in\mathcal{O}$, c'est en particulier un extrema de la fonction f (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathcal{O}$ sous la contrainte linéaire $u_1+\cdots+u_p=1$, par suite $\nabla f(u)\in\mathrm{Vect}\,((1,\cdots,1))$. On en déduit que $(1-u_1)^{n-1}=\cdots=(1-u_p)^{n-1}$, d'où $u_1=\cdots=u_p=\dfrac{1}{p}$. Il existe donc un unique point $u\in\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$ tel que $f(u)=M$. Enfin, on trouve $M=f(\dfrac{1}{p},\cdots,\dfrac{1}{p})=p\left[1-(1-\dfrac{1}{p})^n\right]$.
   (d) Avec la question précédente et 2. (b), on voit que la seule loi de X qui maximise l'espérance de Z est la loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$.
4. On se doute qu'il s'agit de la variable certaine égale à p. Soit $\varepsilon>0$, comme $p-Z_n\geqslant 0$ on déduit de 1. (b) et de l'inégalité de Markov que

$$\mathbb{P}\left(|Zn-p|\geqslant\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(p-Z_n\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{p-\mathbb{E}(Z_n)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{p}(1-x_k)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

car tous les x_k appartiennent à $]0,1[$. La suite (Z_n) converge donc vers la variable certaine égale à p.

Sujet 3.7

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$ converge.

On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$$

On définit les deux fonctions f_α et g de E par : $\forall t \geqslant 0,\ f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $g(t) = \dfrac{1}{1+t}$.

2. Pour tout $\alpha \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T_n(f_\alpha)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(f_\alpha)$.

3. Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$. On note $R_{n,N} = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$.

   (a) Donner la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, x]$ $(x > 0)$ à l'ordre N pour la fonction exponentielle.

   (b) Établir que $0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \dfrac{n^{N+1}}{(N+1)!}$.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour n entier non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{E}\left[g\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right]$ à l'aide de $T_n(g)$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_n = \left\{\left|\dfrac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\}$.

   En considérant $(A_n, \overline{A_n})$ montrer que $\mathbb{E}\left[g\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - g(1)\right]$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

   En déduire la limite de $(T_n(g))_{n \geqslant 1}$.

Solution du sujet 3.7

1. Soit M un majorant de $|f|$. On a $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \leqslant M \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$,
d'où la convergence absolue de la série d'après la convergence de la série exponentielle.
Ainsi la suite $(T_n(f))_n$ est bien définie pour tout $f \in E$.

2. Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. On a $T_n(f_\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \frac{k}{n}} \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ d'où
$$T_n(f_\alpha) = \exp\left[n\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\alpha} = f_\alpha(1).$$

3. (a) La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{N!}\int_0^x \mathrm{e}^t (x-t)^N dt$.

   (b) En remarquant $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, il vient
$$0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} = \left(\mathrm{e}^n - \sum_{k=0}^{N} \frac{n^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-n}$$
D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a
$$\mathrm{e}^n - \sum_{k=0}^{N} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{N!}\int_0^n \mathrm{e}^t (n-t)^N dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^n n^{N+1}}{(N+1)!}.$$
D'où $\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2$ $0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \dfrac{n^{N+1}}{(N+1)!}$.

4. (a) Par le théorème de stabilité, on a S_n suit la loi $\mathcal{P}(n)$, d'où, par le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \times \mathbb{P}(S_n = k) = T_n(g).$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|g|$ est majorée par 1, il vient
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{A_n}\right] \leqslant 2\mathbb{P}(A_n) = 2P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d'après la loi faible des grands nombres puisque X_1 possède une variance.
Pour $\eta > 0$, par continuité de g en 1, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $|x-1| < \varepsilon \Longrightarrow |g(x) - g(1)| \leqslant \eta$. D'où
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_n}\right] = \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{|\frac{S_n}{n}-1|<\varepsilon}\right] \leqslant \eta \times \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n)$$
Donc il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geqslant N$,
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{A_n}\right] + \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_n}\right] \leqslant 2\mathbb{P}(A_n) + \eta\mathbb{P}(\Omega\setminus A_n) \leqslant 3\eta$$
Donc $\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right]$ converge 0. Par linéarité, $\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right] \longrightarrow 0$
Par inégalité triangulaire pour l'espérance, il s'ensuit $T_n(g) = \mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \longrightarrow g(1) = \frac{1}{2}$.

Sujet 3.8

Soient A, B, C et D quatre variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les variables B et C suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et les variables A et D suivent la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ en posant

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. On introduit les deux variables aléatoires X et Y définies par $X(\omega) = A(\omega) + D(\omega) = \mathrm{Tr}(M(\omega))$ et $Y(\omega) = A(\omega) \times D(\omega) - B(\omega) \times C(\omega) = \det(M(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   (a) Si $\omega \in \Omega$, montrer que $M(\omega)^2 = X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
2. Dans cette question, on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices carrées d'ordre 2 qui sont des matrices de projecteurs.
   (a) Caractériser les matrices de $\mathcal{P}$.
   (b) Quelles sont les matrices $M(\omega)$ qui sont multiples de la matrice identité ?
   (c) Caractériser à l'aide de $X(\omega)$ et de $Y(\omega)$ le fait que $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et ne soit pas un multiple de I. (*On pourra utiliser la question 1. (a)*)
   (d) Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{P}\}$.
3. On note $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des matrices inversibles (resp. diagonalisables) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{I}\}$.
   (b) Soit $\omega \in \Omega$, montrer que λ est une valeur propre de $M(\omega)$ si et seulement si $\lambda^2 - X(\omega)\lambda + Y(\omega) = 0$.
   (c) On introduit la variable aléatoire $\Delta = X^2 - 4Y$. Montrer que Δ est à valeurs positives. Calculer $P(\Delta = 0)$.
   (d) Déterminer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{D}\}$.

Solution du sujet 3.8

1. (a) En partant du membre de droite et en simplifiant, on arrive exactement sur le produit matriciel qui représente $M(\omega)^2$.

   (b) Par linéarité de l'espérance, on trouve $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(A) + \mathbb{E}(D) = 2\mathbb{E}(A) = \boxed{0.}$
   En utilisant la formule de Koenig-Huygens et l'indépendance des variables A et D, on obtient $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(D) = 2\mathbb{V}(A) = 2\mathbb{V}(A) = 2\left[\mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}(A)^2\right] = \mathbb{E}(A^2)$.

   Or A^2 est une variable de Bernoulli, d'où $\mathbb{V}(X) = 2\mathbb{P}([A^2 = 1]) = \boxed{\dfrac{4}{3}.}$

   Par indépendance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AD) - \mathbb{E}(BC) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(D) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(C) = -\mathbb{E}(B)^2 = \boxed{-p^2.}$
   Le lemme des coalitions nous dit que les variables AD et BC sont indépendantes, d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(AD) + \mathbb{V}(BC) = \mathbb{E}(A^2D^2) - \mathbb{E}(AD)^2 + \mathbb{E}(B^2C^2) - \mathbb{E}(BC)^2 \\ &= \mathbb{E}(A^2)\mathbb{E}(D^2) - \mathbb{E}(A)^2\mathbb{E}(D)^2 + \mathbb{E}(B^2)\mathbb{E}(C^2) - \mathbb{E}(B)^2\mathbb{E}(C)^2 = \mathbb{P}(A^2 = 1)^2 + p^2 - p^4 = \frac{4}{9} + p^2(1-p^2)\end{aligned}$$

2. (a) Ce sont les matrices Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $Q^2 = Q$.

   (b) Comme les variables A et D (resp. B et C) sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ (resp. $\{0, 1\}$), les seules matrices de $M(\Omega)$ qui sont multiples de la matrice identité sont 0, I et $-I$.

   (c) Si $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et n'est pas un multiple de I, la famille $\{I, M(\omega)\}$ est libre et il résulte alors de 1. (a) et 2. (a) que l'on doit avoir $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$. Réciproquement, si $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$, on voit que $M(\omega)$ est nécessairement un projecteur qui n'est pas un multiple de I.

   (d) On en tire que $\mathbb{P}([M \in \mathcal{P}]) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = I) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0])$. Or, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0] &= \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 0]) + \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 1]) \\ &= \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 0]) = \mathbb{P}([A = 1] \cap [D = 0])\mathbb{P}([BC = 0]) \\ &+ \mathbb{P}([A = 0] \cap [D = 1])\mathbb{P}([BC = 0]) = \frac{2(2q - q^2)}{9}.\end{aligned}$$

   D'où $\mathbb{P}([M \in \mathcal{P}]) = \dfrac{p^2 + q^2}{9} + \dfrac{2(2q - q^2)}{9} = \dfrac{1}{9}\left[p^2 - q^2 + 4q\right] = \dfrac{3 - 2p}{9}$.

3. (a) On sait que $M(\omega) \in \mathcal{I}$ si et seulement si $Y(\omega) \neq 0$. En passant à l'événement contraire, il vient $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \notin \mathcal{I}\}\right) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(AD = BC)$. Comme la variable BC prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, avec les propriétés d'indépendance on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(M \in \mathcal{I}\right) &= 1 - \mathbb{P}([AD = 1] \cap [BC = 1]) - \mathbb{P}([AD = 0] \cap [BC = 0]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([AD = 1])\mathbb{P}(BC = 1) - \mathbb{P}([AD = 0])\mathbb{P}([BC = 0]) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{9}\right)p^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right)(2q - q^2) = \frac{4 + 3p^2}{9}\end{aligned}$$

   (b) Comme λ est une valeur propre de $M(\omega)$ si et seulement si la matrice $M(\omega) - \lambda I$ est non inversible, ce qui équivaut à $\lambda^2 - X(\omega)\lambda + Y(\omega) = 0$.

   (c) On voit que $\Delta = (A + D)^2 - 4AD + 4BC = (A - D)^2 + 4BC \geqslant 0$ puisque BC est à valeurs positives. Ceci implique également que $\mathbb{P}(\Delta = 0) = \mathbb{P}([A = D] \cap [BC = 0]) = \mathbb{P}([A = D])\mathbb{P}([BC = 0]) = \left(\mathbb{P}([A = D = -1]) + \mathbb{P}([A = D = 0]) + \mathbb{P}([A = D = 1])\right)(1 - p^2) = \dfrac{1 - p^2}{3}$.

   (d) Si $\Delta(\omega) = 0$ et $M(\omega) \in \mathcal{D}$, alors $M(\omega)$ est multiple de l'identité, et lorsque $\Delta(\omega) \neq 0$ on voit avec 3. (b) que $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. D'où avec 2. (b), on aboutit à $\mathbb{P}(M \in \mathcal{D}) = \dfrac{q^2}{3} + 1 - P(\Delta = 0) = \dfrac{q^2 + p^2 + 2}{3} = 1 - 2\dfrac{pq}{3}$.

Sujet 3.9

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $]0,1[$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que :

- X_0 est la variable certaine qui vaut 1 ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n ;
- on a : $\mathbb{P}(X_1 = X_0) = p$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \{0,1\}$, on a : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = p$.

1. Calculer p_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $p_n = \dfrac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$.
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi.
4. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

On note $(\mathcal{I})$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{I}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0,1\},\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i} = k) = \mathbb{P}(X_i = 1).$$

5. En supposant $(\mathcal{I})$ vérifiée, calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_{n+i}, X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
6. Montrer que si, pour tout $n \geqslant 2$, la variable X_n ne dépend que de X_{n-1}, mais pas de $X_{n-2}, \ldots, X_0$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 2$, tout $j \in [\![0, n-2]\!]$ et tout $k \in \{0,1\}$, les variables X_n et X_j sont indépendantes pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}$, alors la propriété $(\mathcal{I})$ est vérifiée.

Solution du sujet 3.9

1. Comme $X_0 = 1$ on a : $p = \mathbb{P}(X_1 = X_0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p_1$.
2. Par la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= p \times p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p). \end{aligned}$$

   On en déduit la formule demandée soit par récurrence sur $n \geqslant 1$, soit par la méthode de calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

3. Comme $2p - 1 \in]-1, 1[$, on a : $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\boxed{\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$
4. Comme X_n et X_{n+1} suivent des loi de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \iff p = p_{n+1} \iff 2p - 1 = (2p-1)^{n+1} \iff \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

   car $x^m = x$ ssi $m = 1$ (mais pas ici) ou $x = 0$ ou $x = 1$ ou ($x = -1$ et m impair) ; or ici $2p - 1 \in]-1, 1[$.
   Autre idée : s 'il y indépendance, alors $p = \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ pour tout $k \in [\![0, 1]\!]$. Donc, par somme sur k, on obtient $2p = 1$. Réciproque facile.

5. Comme X_n et X_{n+i} sont des variables de Bernoulli, alors X_nX_{n+i} suit la loi de Bernoulli de paramètre :

$$\mathbb{P}\big((X_n = 1) \cap (X_{n+i} = 1)\big) = \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+i} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) = p_i \times p_n.$$

   Donc par la formule de Koenig-Huyghens, on a :

$$\mathrm{Cov}(X_{n+i}, X_n) = \mathbb{E}(X_{n+i}X_n) - \mathbb{E}(X_{n+i})\mathbb{E}(X_n) = p_i \times p_n - p_{n+i} \times p_n = \boxed{p_n(p_i - p_{n+i}).}$$

6. Montrons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1\},\ \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+i} = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)$.
   - Pour $i = 1$ la propriété est vraie par hypothèse de l'énoncé puisque $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ (d'après Q1).
   - Si la propriété est vrai à l'ordre $i \geqslant 1$, alors, par la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_{n+i} = 0)$, $(X_{n+i} = 1)$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i+1} = k) = \frac{\mathbb{P}\big((X_{n+i+1} = k) \cap (X_n = k)\big)}{\mathbb{P}(X_n = k)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = k)} \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_n=i]}\big((X_{n+i+1} = k) \cap (X_n = k) = \ell\big) \times \mathbb{P}(X_{n+i} = \ell) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = k)} \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_{n+i+1} = k)\mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_n = k)\mathbb{P}(X_{n+i} = \ell) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_{n+i+1} = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i} = \ell) \text{ (formule de Bayes)} \\ &= \underbrace{pp_i}_{\text{si } \ell=k} + \underbrace{(1-p)(1-p_i)}_{\text{si } \ell\neq k} \text{ par HR} \\ &= (2p-1)p_i + (1-p) = p_{i+1} = P(X_{i+1} = 1) \text{ d'après la relation de récurrence de Q2.} \end{aligned}$$

Sujet 3.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls. On considère l'ouvert $\mathcal{O} = (\mathbb{R}^*)^n$ de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$.

On note $\mathcal{C}$ la partie de $\mathcal{O}$ constituée des points $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $h(x_1, \dots, x_n) = 1$.

1. Justifier que la fonction f est de classe C^2 et déterminer en tout point $M = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ le gradient $\nabla f(M)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 f(M)$.
2. On considère la fonction f_1 restriction de f à $\mathcal{C}$ et on suppose que f_1 admet en un point M_0 un extremum local. Déterminer les coordonnées de M_0.
3. Soit $M \in \mathcal{C}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on pose $g(t) = f(M_0 + tU)$ où $U = M - M_0$.
   (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et donner $g'(t)$ et $g''(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
   (b) Démontrer que f_1 admet un minimum global en M_0.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ un paramètre réel inconnu. Soient $Z_1, \dots, Z_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et qui admettent un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a
   $$\mathbb{E}(Z_i) = \theta a_i \text{ et } \mathbb{V}(Z_i) = 1.$$
   Pour $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :
   $$X_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i,$$
   et on suppose que X_n est un estimateur sans biais de θ.
   (a) Déterminer une relation satisfaite par les nombres $\beta_1, \dots, \beta_n$.
   (b) Pour quelles valeurs de $\beta_1, \dots, \beta_n$ la variance de X_n est-elle minimale ?

On note pour la suite de l'exercice $\beta_1^*, \dots, \beta_n^*$ les valeurs trouvées.

5. On pose $X_n^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* Z_i$.
   Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels non nuls tels que $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i$ soit un estimateur sans biais de θ.
   (a) Démontrer que la variance de Y_n n'est pas nulle.
   (b) On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de X_n^* et Y_n.
   Rappeler pourquoi $|\rho| \leqslant 1$ puis démontrer que $\rho > 0$.

Solution du sujet 3.10

1. La fonction f est de classe C^2 car polynomiale et on trouve sans peine, en notant $I_n$la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que : $\nabla f(M) = (2x_1, \dots, 2x_n)$ et $\nabla^2 f(M) = 2I_n$.
2. C'est un problème d'extremum sous contrainte linéaire. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\nabla f(M_0) = \lambda \nabla h(M_0)$. En notant $M_0 = (x_1, \dots, x_n)$, on a :
$$\begin{cases} 2x_1 & = \lambda a_1 \\ & \vdots \\ 2x_n & = \lambda a_n \end{cases}.$$
Comme $M_0 \in \mathcal{C}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$, donc $\displaystyle\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, somme qui est non nulle.
Il vient alors $\lambda = \dfrac{2}{s}$ et $x_j = a_j/s$ (où $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$) pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
3. (a) Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, un théorème de cours affirme que g est de classe C^2 avec, pour $t \in [0, 1]$:
$$g'(t) = \langle \nabla f(M_0 + tU), U\rangle \text{ et } g''(t) = q_{M_0+tU}(U),$$
où q_{M_0+tU} est la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f au point $M_0 + tU$.
   (b) Comme f est de classe C^2, on peut utiliser la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 pour g entre 0 et 1. On a donc : $g(1) - g(0) = g'(0) + \displaystyle\int_0^1 (1-t)g''(t)\,\mathrm{d}t$.
Mais on a $g(1) = f(M_0 + U) = f(M)$ et $g(0) = f(M_0)$. De plus $g'(0) = 0$ puisque $\nabla f(M_0)$ est orthogonal à l'hyperplan $h(x_1, \dots, x_n) = 0$. Il reste donc :
$$f(M) - f(M_0) = \int_0^1 (1-t) q_{M_0+tU}(U)\,\mathrm{d}t.$$
Enfin, $\nabla^2 f(M_0 + tU) = 2I_n$, donc ses valeurs propres sont strictement positives : pour tout W non nul dans $\mathbb{R}^n$, on a $q_{M_0+tU}(W) > 0$.
4. (a) Comme X_n est un estimateur sans biais de θ, on a $\mathbb{E}(X_n) = \theta$ d'où, puisque $\theta \neq 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i = 1$.
   (b) Comme les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes, les variables $\beta_1 Z_1, \dots, \beta_n Z_n$ le sont aussi. Il vient alors : $\mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\beta_i Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \mathbb{V}(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.
Selon la question 3, $\mathbb{V}(X_n)$ est donc minimale pour : $\beta_1 = a_1/s, \dots, \beta_n = a_n/s$, où $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.
5. (a) Par indépendance, on a : $\mathbb{V}(Y_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\alpha_i Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \underbrace{\mathbb{V}(Z_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.
   (b) • D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n)^2 \leqslant \mathbb{V}(X_n^*)\mathbb{V}(Y_n)$, donc $|\rho| \leqslant 1$.
• D'après ce qui précède, X_n^* est l'estimateur sans biais de θ de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de θ de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i$. Or, pour tout λ réel, $T_n = X_n^* + \lambda(Y_n - X_n^*)$ est un estimateur de θ de cette forme, qui est de plus sans biais. Il en résulte que :
$$\mathbb{V}(X_n^*) \leqslant \mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}(X_n^*) + 2\lambda\,\mathrm{Cov}(X_n, Y_n - X_n^*) + \lambda^2 \mathbb{V}(Y_n - X_n^*).$$
Par suite, $2\lambda\,\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n - X_n^*) + \lambda^2\mathbb{V}(Y_n - X_n^*) \geqslant 0$, pour tout λ réel.
Il vient ainsi : $\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n - X_n^*) = 0$, ce qui donne $\mathrm{Cov}(Y_n, X_n^*) = \mathbb{V}(X_n^*) > 0$.

Sujet 3.11

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Dans un casino, un jeu se déroule de la façon suivante :
   un croupier mélange trois cartes, qui sont l'As de Cœur, le deux de Cœur et le Valet de Pique et les présente sur la table face cachée.
   Un joueur choisit une carte au hasard. Si celle-ci est un Cœur, il gagne la somme correspondante (respectivement 1 Euro pour l'As ou 2 Euros pour le deux) et rejoue, le croupier mélangeant à nouveau les trois cartes ; si la carte tirée est le Valet de Pique, le jeu s'arrête.

   (a) Montrer que la probabilité que le Valet de Pique n'apparaisse jamais est nulle.

   On note N la variable aléatoire représentant le nombre de cartes de Cœur tirées jusqu'à l'apparition du Valet de Pique (événement qui se produit donc presque sûrement), et on note S la somme des Euros obtenus.

   (b) Déterminer la loi de N.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $(N = n)$.

   (d) Calculer l'espérance conditionnelle de S sachant $(N = n)$.

   (e) Quel prix minimum le casino doit-il faire payer une telle partie pour ne pas être perdant en moyenne ?

On admet que si $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_k a_{n,k}$ converge (on pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$),
- la série $\sum\limits_n A_n$ converge

alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$ existe et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$.

2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $[\![0, M]\!]$. On suppose que les variables aléatoires $(N, X_0, X_1, \dots, X_i, \dots)$ sont mutuellement indépendantes.
   On admet qu'on définit une variable aléatoire discrète sur Ω en posant
   $$\forall\, \omega \in \Omega\,, \quad T(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)\,.$$

   (a) Justifier que si N a une espérance, alors T a une espérance.

   (b) On suppose que N admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_0)\,\mathbb{E}(N+1)$.

   (c) Retrouver alors l'espérance de la variable aléatoire S de la première question.

Solution du sujet 3.11

1. (a) Le probabilité que les n premiers tirages ne donnent pas le Valet de Pique est $(2/3)^n$.
Par le th. de continuité monotone, la probabilité que le Valet n'apparaisse pas, est $\lim\limits_{n\to+\infty}(2/3)^n = 0$.
Le Valet de Pique apparaît presque sûrement.

   (b) On a $N(\Omega)=\mathbb{N}$, et $N+1$ est le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $1/3$ par équiprobabilité des trois cartes, donc $N+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$.

   (c) Si $N=n$, on a tiré n cartes de Cœur, chacune rapportant un ou deux Euros, donc, sachant $(N=n)$, S prend ses valeurs dans $[\![n,2n]\!]$.
Pour $k\in[\![n,2n]\!]$, $(S=k)$ est réalisé si et seulement si on a obtenu x As et y deux, avec x et y dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& n\\ x+2y &=& k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2n-k\\ y &=& k-n\end{array}\right.$$

On doit donc placer $k-n$ deux parmi n cartes tirées, donc le nombre de tirages favorables est $\binom{n}{k-n}$, parmi 2^n tirages posssibles (il y a deux cartes de Cœur), soit

$$\forall\, k\in[\![n,2n]\!]\,,\quad \mathbb{P}_{(N=n)}(S=k)=\frac{\binom{n}{k-n}}{2^n}\,.$$

   (d) Sachant $(N=n)$, S est d'univers image fini et positif, et a donc une espérance.

$$\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big)=\sum_{k=n}^{2n} k\,\frac{\binom{n}{k-n}}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(n+j)\binom{n}{j}\underset{(*)}{=}E(Y+n)=n+\frac{n}{2}=\frac{3n}{2},$$

$(*)$ par thm de transfert en reconnaissant la loi d'une variable $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1/2)$.
Autre idée : reconaître que la loi sachant $(N=n)$ de $S-n$ est binomiale.

   (e) La série de terme général $\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big)\,\mathbb{P}(N=n)$ converge donc, par formule de l'espérance totale,

$$\mathbb{E}(S)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big)\,\mathbb{P}(N=n)\Big]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{3n}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]=3$$

Le prix minimum à demander est donc de 3 Euros.

2. (a) On a $\forall\omega\,,\ 0\leqslant T(\omega)=\displaystyle\sum_{i=0}^{N(\omega)}X_i(\omega)\leqslant M\,\big[N(\omega)+1\big]$, d'où T a une espérance si N a une espérance.

   (b) On a $T(\Omega)\subset\mathbb{N}$. Par σ-additivité, indépendance, permutation de sommes (résultat admis) et théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\big[k\,\mathbb{P}(T=k)\big]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[k\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big((T=k)\cap(N=n)\big)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}X_i=k\right)\cap(N=n)\right)\right]\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i=k\right)\,\mathbb{P}(N=n)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=n)\sum_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i=k\right)\right]\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\big[\mathbb{P}(N=n)\big]\,(n+1)\,\mathbb{E}(X_0)\Big]=\mathbb{E}(N+1)\,\mathbb{E}(X_0)\end{aligned}$$

Autre idée : par la formule de l'espérance totale, avec le SCE $(N=n)_n$ (plus rapide et plus simple).

(c) Dans le jeu de la question 1., on considère la variable aléatoire discrète X_i valant 1, 2 ou 0 selon que l'on tire l'As de Cœur, le deux de Cœur ou le Valet de Pique au i-ième tirage. Les (X_i) sont indépendantes de même loi uniforme (bornée) et d'espérance 1.

On a bien alors $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$, et 2.b) donne $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N+1)\,\mathbb{E}(X_0) = 3 \times 1 = 3$.

SUJET 3.12

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face avec la probabilité 1/2). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le k-ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le k-ième lancer de la pièce donne face ».
On appelle « série » une succession de lancers consécutifs amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin de la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Par exemple :

$$\textbf{Exemple :} \quad \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n}^\circ 1} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n}^\circ 2} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n}^\circ 3} \cap F_8 \cap \cdots .$$

L'objet de cet exercice est d'étudier le nombre de séries obtenues.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4 .$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les lois de N_1 et N_2.
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

3. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité : $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$.
   En déduire que : $\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap P_n\right)$.

Dans la suite, on admet de même que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap F_n\right) \\ \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap P_n\right) \\ \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap F_n\right) \end{cases}$$

4. Montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) .$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction pour tout x réel par : $G_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N_m = k)x^k$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G_{n+1}(x) = \dfrac{1+x}{2} G_n(x)$.
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire $N_n - 1$ à partir de l'expression de G_n.

Solution du sujet 3.12

1. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1. La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}$$

   Et $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
   En conclusion, N_1 suit la loi certaine de valeur 1 et N_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si l'événement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité entre les deux événements.
   Puisque les événements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)\mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ est un système complet d'événements pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Par la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
&\quad + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) \qquad \text{(FPT avec le SCE } [P_n, F_n])
\end{aligned}$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k)x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k$$

   Or, $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$. Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^{j+1} = x\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$

   car $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$. On en conclut le résultat demandé.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$G_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k .$$

   Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_n = k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$, soit $N_n - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2)$

Sujet 3.13

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé .
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes, de loi géométrique de paramètre p.

On note C la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$C(\omega) = \begin{cases} \max\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\right\} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) > X_{k+1}(\omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[C = n]$ à l'aide des événements $[X_i \leqslant X_{i+1}]$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k))$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C \geqslant 2)$.
4. (a) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inclusion suivante :

$$[C = 0] \subset [X_1 \leqslant X_2] \cap [X_3 \leqslant X_4] \cap \cdots \cap [X_{2n-1} \leqslant X_{2n}]$$

   montrer que $\mathbb{P}(C = 0) = 0$.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(q) = \dfrac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2)\times\cdots\times(1-q^n)}$.

5. Pour n et k appartenant à $\mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = u_n(q) \times q^{n(k-1)}$$

6. Montrer que $\mathbb{P}(C \geqslant n) = u_n(q)$.
7. En simplifiant $\frac{1-q}{1-q^k}$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_n(q) \leqslant \dfrac{1}{(1+q)^{n-1}}$.
8. Montrer que C admet une espérance si et seulement si la série de terme général $u_n(q)$ converge.
   Exprimer alors $\mathbb{E}(C)$ en fonction des nombres $u_n(q)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n(q) \geqslant \dfrac{1}{n!}$.
   En déduire une minoration de $\mathbb{E}(C)$.

Solution du sujet 3.13

1. D'après le cours : $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} q^{i-1}p = \frac{q^{k-1}}{1-q} \times p$ d'où $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = q^{k-1}$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\{C = n\} = \{X_1 \leqslant X_2\} \cap \{X_2 \leqslant X_3\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leqslant X_n\} \cap \overline{\{X_n \leqslant X_{n+1}\}}$.
3. Par indépendance de X_1 et X_2 :
$$\mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k)) = \mathbb{P}(X_2 \geqslant k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot q^{k-1}p = (q^2)^{k-1}p.$$
D'où : $\mathbb{P}(C \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_2 \geqslant X_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k)) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$.
4. (a) L'inclusion est claire. Les événements de droite sont indépendants et ont tous la même probabilité, calculée à la question 2 : $\mathbb{P}(X_i \leqslant X_{i+1}) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \mathbb{P}(C \geqslant 2) = \frac{1}{1+q}$.
On en déduit : $\mathbb{P}(C = 0) \leqslant \left(\frac{1}{1+q}\right)^n$, d'où $\mathbb{P}(C = 0) = 0$ (en faisant tendre n vers $+\infty$).
(b) On a $\mathbb{P}(C = 0) + \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C \geqslant 2) = 1$. Donc $P(\mathbb{C} = 1) = \frac{q}{1+q}$.
5. Récurrence sur n : Pour $n = 1$, il vient $u_1(q) = \frac{1-q}{1-q} = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = q^{k-1}$.
Supposons la propriété vraie au rang n. Alors, par indépendance de X_1 avec $(X_{n+1}, \ldots, X_2)$:
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \text{ (f. proba tot. avec le SCE } (X_1 = i)_i)$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \quad \text{car } (X_{n+1}, \ldots, X_2) \text{ et } (X_n, \ldots, X_1) \text{ sont id. distribués}$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} u_n(q) \times (q^n)^{i-1} \times q^{i-1}p \text{ (par HR)}$$
$$= p \times u_n(q) \times \sum_{i=k}^{+\infty} (q^{n+1})^{i-1} = u_n(q) \times \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} = u_{n+1}(q) \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} \text{ (CQFD).}$$
6. Par conditionnement avec le SCE $(X_i = i)_{i \in \mathbb{N}*}$ puis par indépendance :
$$\mathbb{P}(C \geqslant n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant k) \times \mathbb{P}(X_1 = k) = u_{n-1}(q) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{n-1}\right)^{k-1} \times q^{k-1}p = u_n(q)$$
7. Car $\frac{1-q}{1-q^k} = \frac{1}{1+q+\cdots+q^{i-k}} \leqslant \frac{1}{1+q}$ si $k \geqslant 1$ (et le quotient vaut 1 pour $k = 1$).
8. Par l'inégalité précédente, $u_N(q) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où :
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C = n) = \sum_{n=1}^{N} n\left(\mathbb{P}(C \geqslant n) - \mathbb{P}(C \geqslant n+1)\right) = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C \geqslant n) - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\mathbb{P}(C \geqslant n)$$
$$= \sum_{n=2}^{N+1} \mathbb{P}(C \geqslant n) + \mathbb{P}(C \geqslant 1) - \mathbb{P}(C \geqslant N+1) = \sum_{n=1}^{N} u_n(q) - u_{N+1}(q) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(q) = \mathbb{E}(C).$$
9. Pour $n \geqslant 2$: $u_n(q) = \frac{1}{(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})} \geqslant \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{1}{n!}$
et donc $\mathbb{E}(C) = f(q) \geqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1$.

Sujet 3.14

Dans cet exercice, λ désigne un réel strictement positif.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n- échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.
2. (a) Déterminer une densité de la variable aléatoire J_n.

   (b) Soit $n \geqslant 3$ un entier. Démontrer que les variables aléatoires $\dfrac{1}{J_n}$ et $\dfrac{1}{J_n^2}$ admettent chacune une espérance et donner leurs valeurs respectives.

   (c) Soit $n \geqslant 3$ une entier. On pose $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$.
   Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Est-il convergent ?
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

   (a) Démontrer que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

   (b) Justifier que, pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]) = 1 - \alpha$.

   (c) Montrer que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α.

Solution du sujet 3.14

1. La variable aléatoire S_n admet bien une variance comme somme de variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2. Puis on a $\mathbb{E}(S_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=\frac{n}{\lambda}$ et, par indépendance, $\mathbb{V}(S_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=\frac{n}{\lambda^2}$ d'où $\mathbb{E}(J_n)=n$ et $\mathbb{V}(J_n)=\lambda^2V(S_n)=n$.

2. (a) On a $J_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda X_k$. Mais, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $X_k\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$ donc $\lambda X_k\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$. Par indépendance, on a donc $J_n\hookrightarrow\gamma(n)$ et une densité de J_n est : $f_{J_n}:t\mapsto\dfrac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$.

   (b) Sous réserve de convergence (absolue), par transfert : $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}f_{J_n}(t)\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(n-1)}{(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)}$.
   Puis, sous réserve de convergence (absolue), on a, toujours par le théorème de transfert :
   $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}f_{J_n}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n-2)=\frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

   (c) • La variable aléatoire $\widehat{\lambda_n}=\dfrac{n}{S_n}$ est une fonction du n-échantillon i.i.d. $(X_1,\dots,X_n)$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$: c'est un estimateur de λ. De plus $\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}\right)=n\lambda\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right)=\dfrac{n\lambda}{n-1}$ donc $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur biaisé de λ.

   • On a : $\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_n}\right)=\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}^2\right)-\left(\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}\right)\right)^2=\dfrac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}-\left(\dfrac{n\lambda}{n-1}\right)^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$
   Ainsi, comme le biais de $\widehat{\lambda_n}$ converge vers 0, $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur convergent de λ.
   Autre idée : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge en proba vers 0 (loi faible des GN) et on compose par $x\mapsto\frac{1}{x}$ (continue).

3. (a) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ a pour espérance n/λ et pour variance n/λ^2. Les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle. Ainsi (théorème central-limite) la variable aléatoire centrée réduite $\dfrac{S_n-\frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}=N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

   (b) Pour n assez grand, on peut supposer que $N_n\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi :
   $$\mathbb{P}\left(-u_\alpha\leqslant N_n\leqslant u_\alpha\right)\approx\Phi\left(u_\alpha\right)-\Phi\left(-u_\alpha\right)=2\Phi(u_\alpha)-1=1-\alpha.$$

   (c) On a les équivalences :
   $$\begin{aligned}\lambda\in\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n},\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]&\Leftrightarrow\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{S_n}\leqslant\lambda\leqslant\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{S_n}\\&\Leftrightarrow\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{\lambda}\leqslant S_n\leqslant\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{\lambda}\\&\Leftrightarrow-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\frac{n}{\lambda}\leqslant S_n-\frac{n}{\lambda}\leqslant\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\frac{n}{\lambda}\\&\Leftrightarrow-u_\alpha\leqslant N_n\leqslant u_\alpha\end{aligned}$$
   Donc $\mathbb{P}\left(\lambda\in\left[\left(1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n},\left(1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right)=\mathbb{P}\left(-u_\alpha\leqslant N_n\leqslant u_\alpha\right)\approx1-\alpha$ pour n assez grand.

Sujet 3.15

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^1 ((1-t)\mathrm{e}^t)^n dt$.

On admet que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Enfin, on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$, : $P_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} t^n dt = n!(1 - P_n(x))$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - P_n(n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+1}}{n!} I_n$.
   (c) Donner un équivalent de $1 - P_n(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Écrire une fonction Python `f(n)` qui renvoie la valeur $P_n(n)$ pour n entier naturel non nul donné. On pourra utiliser la fonction `exp` (exponentielle) mais pas la fonction `factorial` (factorielle).
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
   (a) Quelle est la loi suivie par S_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$?
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$. En déduire un équivalent de $n!$

Soit X une variable aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(X) = \{x \in \mathbb{R} / \mathbb{P}(X < x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x)\}$.

3. (a) Montrer que :$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_{n+1}(x) + P'_{n+1}(x)$.
   (b) Montrer que $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ et $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre n, où n est un entier supérieur à 2, alors $\mathcal{M}(X) = \{n\}$.

Solution du sujet 3.15

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et n de $\mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, à la fonction $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = x$ et $b = 0$.
$g(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(0-x)^k}{k!} g^{(k)}(x) + \int_x^0 \frac{(0-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$
Soit ici $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt = 1$ soit $\displaystyle n!(1 - P_n(x)) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}dt.$
Autre idée : récurrence...
(b) $\displaystyle 1 - P_n(n) = \frac{1}{n!}\int_0^n t^n \mathrm{e}^{-t}dt$. Le changement de variable $t = n(1-u)$ donne le résultat.
(c) $\displaystyle 1 - P_n(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \times \frac{\mathrm{e}^{-n}n^{n+1}}{n!}.$
(d)

```
def f(n):
    u,s=1,0
    for i in range(n+1):
        s=s+u
        u=u*n/(i+1)
    return s/exp(n)
```

2. (a) Par théorème de stabilité, on sait que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.
(b) $\displaystyle P_n(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} = P(S_n \leqslant n) = P\Big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\Big) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(0) = \frac{1}{2}$ (en utilisant le TCL)
Donc $\displaystyle 1 - P_n(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. D'où $n! \sim \sqrt{2\pi n} \times (\frac{n}{e})^n$ (d'après Q1c).

3. (a) $\displaystyle P'_{n+1}(x) = -P_{n+1}(x) + \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = -P_{n+1}(x) + P_n(x).$
(b) Soit $n \geqslant 2$. $P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = P_{n+1}(n+1) - P_{n+1}(n) - P'_{n+1}(n)$.
Taylor avec reste int. à l'ordre 1 : $\displaystyle P_{n+1}(n+1) = P_{n+1}(n) + P'_{n+1}(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)P''_{n+1}(t)dt.$
Donc $\displaystyle P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)P''_{n+1}(t)dt.$
Or $\displaystyle \forall t \in [n, n+1], P''_{n+1}(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{(n+1)!}(t - (n+1)) \leqslant 0$. Avec égalité uniquement si $t = n+1$.
Donc $P_{n+1}(n+1) - P_n(n) < 0$.
De même : $\displaystyle P_n(n+1) - P_{n-1}(n) = P_n(n+1) - P_n(n) - P'_n(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)P''_n(t)dt.$
Or : $\displaystyle \forall t \in [n, n+1], P''_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}}{n!}(t-n) \geqslant 0$. Et on a encore $P_n(n+1) - P_{n-1}(n) > 0$.
Donc $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante et $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante..
Enfin : $\displaystyle \forall n \geqslant 2, P_n(n) - P_{n-1}(n) = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$
Donc les deux suites $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ et $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent vers $1/2$.
(c) L'entier $n \in \mathcal{M}(X)$ car : $\displaystyle \mathbb{P}_{n-1}(n) < \frac{1}{2} < \mathbb{P}_n(n) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < n) < \frac{1}{2} < \mathbb{P}(X \leqslant n).$
Si $x < n$: $\displaystyle \mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant n-1) < \frac{1}{2}$. Donc $x \notin \mathcal{M}(X)$. Si $x > n$: $\displaystyle \mathbb{P}(X < x) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant n) > \frac{1}{2}$.
Donc $x \notin \mathcal{M}(X)$.

Sujet 3.16

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $X^2 - (a+c)X + ac + b$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) Donner un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour qu'elle soit inversible.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.
   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$
$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ Y^2(\omega) & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer l'événement « A est diagonalisable ». Calculer sa probabilité.
   (b) Calculer la probabilité que $A^2 = 0$.
3. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes telles que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et Y suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$
   Pour tout t réel, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$A_t(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ -t/4 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$
   On note D_t l'événement « la matrice A_t est diagonalisable ».
   (a) Calculer $P(D_0)$.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(D_t)$ à l'aide de F_X la fonction de répartition de X.

Solution du sujet 3.16

1. (a) Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} a^2-b & a+c \\ -b+c^2 & c^2-b \end{pmatrix}$, d'où

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A = A^2 - (a+c)A = (ac+b)I_2 = \det(A)I_2.$$

(b) Les polynômes de degré 0 ne sont annulateurs que pour la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas ici. Un polynôme de degré un $\alpha(X-\lambda)$ est annulateur de A ssi $A = -\alpha I_2$ ce qui n'est pas le cas ici. Donc le polynôme trouvé à la question précédente est annulateur de degré minimal.

(c) La matrice A est inversible si et seulement si $0 \neq \det(A) = ac+b$.

(d) Le système de 4 équations $A^2 = 0$ se simplifie en $a+c = ac+b = 0$.

(e)
- Si la matrice A admet deux valeurs propres distinctes ($\Delta = (a-c)^2 - 4b > 0$, elle est diagonanilisable .
- Si la matrice A admet une unique valeur propre, elle n'est pas diagonalisable, car, sinon, elle serait déjà diagonale.
- Si la matrice A n'admet pas de valeurs propres elle n'est pas diagonalisable.

La CNS demandée est donc $(a-c)^2 - 4b > 0$.

2. (a) Par la question précédente, l'événement « A est diagonalisable » est $D = [(X-1)^2 + 4Y^2 > 0]$. Comme $(X-1)^2 + 4Y^2 \geqslant 0$, par indépendance et lois suivies, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{D}) = \mathbb{P}([(X-1)^2+4Y^2 = 0]) = \mathbb{P}([(X-1)^2 = 0] \cap [Y^2 = 0]) = \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=0) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(D) = 1$$

(b) Toujours par la question précédente $[A^2 = 0] = [X = 1] \cap [X + Y^2 = 0]$. Donc :

$$\mathbb{P}(A^2 = 0) = \mathbb{P}([(X=1)] \cap [(X=0)] \cap [(Y=0)]) = 0$$

Autre idée : sans calcul, remarquer directement que, comme $A \neq 0$, on a $D \subset \overline{[A^2 = 0]}$.

3. (a) Par la première question $\mathbb{P}(D_0) = \mathbb{P}(X \neq Y)$. Or la variable X charge deux points alors que la variable Y est continue et ne charge pas les points. Ainsi $\mathbb{P}(D_0) = 1$.

(b) De nouveau $\mathbb{P}(D_t) = \mathbb{P}((X-Y)^2 - t > 0)$. On calcule donc pour $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X-Y)^2 > t) &= \mathbb{P}([(X-Y)^2 > t] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([(X-Y)^2 > t] \cap [Y=1]) \\
&= \mathbb{P}([X^2 > t] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([(1-X)^2 > t] \cap [Y=1]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X^2 > t) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([(1-X)^2 > t]) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X > \sqrt{t}) + \mathbb{P}(X < 1 - \sqrt{t})\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(D_t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F_X(\sqrt{t}) + \frac{1}{2}F_X(1-\sqrt{t})$$

Bien entendu, $\mathbb{P}(D_t) = 1$ lorsque $t \leqslant 0$. En conclusion

$$\mathbb{P}(D_t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F_X(\sqrt{t}) + \frac{1}{2}F_X(1-\sqrt{t}) & \text{si} \quad t > 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{t} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

CHAPITRE

4

OPTION B/L

Sujet 4.1

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K.

2. Déterminer l'ensemble D des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$ converge.

   On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$.

3. Déterminer le sens de variation de F sur D.

On admet que la fonction F est dérivable sur D et qu'elle vérifie

$$\forall x \in D\,, \qquad x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K\,.$$

Pour tout $x \in D$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

4. Justifier qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D\,, \qquad G(x) = C - K \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

5. Déterminer la limite de G en $+\infty$, et en déduire une relation entre C et K.
6. (a) Prouver la convergence et calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

   (on pourra utiliser le changement de variable $u : t \to \sqrt{t}$ après l'avoir justifié).

   (b) Soit $x \in D$. Prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

   (c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\right] = 0\,.$$

   (d) En déduire la limite de G en 0, puis la valeur de C.
7. En déduire la valeur de K.

Solution du sujet 4.1

1. $\varphi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-1/2}$ et $\varphi(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$; donc K converge.

2. - $f_x : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $x \geqslant 0$;
   - pour $x = 0$, $f_0(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-3/2}$ d'intégrale divergente ;
   - pour $x > 0$, $f_x(u) \underset{0^+}{\sim} \frac{\varphi(u)}{x}$ d'intégrale convergente, $f_x(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$, donc $F(x)$ converge.

   Ainsi et $D = \mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(u)$ décroissante, donc F aussi.
4. La fonction G est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, d'après la relation admise,

$$G'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,F(x) - \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right] = -K\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

   Les fonctions G et $H : x \mapsto -K\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$ (bien définie car φ a une intégrale convergente en 0^+) ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y diffèrent d'une constante.
5. La fonction F est décroissante, positive et a une limite finie en $+\infty$, donc $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   D'autre part, par convergence de K, $G(x) = C - K\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2$; d'où $C = K^2$.
6. (a) Le changement de variables $t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe C^1 bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. L'intégrale demandée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi$ sont de même nature et égales. Donc $J = \pi$.

   (b) Par changement de variables $u \mapsto u/x = t$ (pour $x > 0$) on obtient

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

   donc l'intégrale converge.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de J, il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Par continuité de exp en 0,

$$\exists \eta > 0\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\quad 0 \leqslant u \leqslant \eta \implies |\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

   Alors, pour tout $x \in [0, \eta/A]$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\ - J\right| \leqslant \int_0^A \frac{|\mathrm{e}^{-tx} - 1|}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\,J + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   d'où la différence des intégrales tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

   (d) D'après c)

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} J$$

   D'autre part, $\lim\limits_{0^+} G = C$ car l'intégrale de φ converge en 0 ; d'où $C = \pi$.
7. D'après 5, $K = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$.

Sujet 4.2

Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la différence $x - \lfloor x \rfloor$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes à valeurs dans $[0, 1[$, qui suivent la loi uniforme sur cet intervalle.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ puis de $\lfloor X + Y \rfloor$ et calculer l'espérance $E\big(\lfloor X + Y \rfloor\big)$.
2. Déterminer la loi de $\{X + Y\}$.

   On considère une suite $(X_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi que X.

   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
3. (a) Écrire une fonction Python `simulPE2S_n(n)` qui réalise la simulation de $\lfloor S_n \rfloor$.

   (b) On exécute le programme suivant

```
y = np.zeros(10)
for n in range(1,11):
        esp = 0
        for k in range(10000):
                        esp += simulPE2S_n(10*n)
                        y[n-1] = esp/10000
print(y)
```

   qui affiche `[ 4.5009 9.5047 14.4965 19.4956 24.464 29.5111 34.4629 39.4877 44.4961 49.4689]`
   En admettant que $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$ est une fonction affine de n, faire une conjecture sur cette espérance.
4. (a) Établir que pour tout entier n et tout x réel, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

   (b) Montrer que pour tout x réel et $y \in [0, 1[$, $\{x + y\} = \{\{x\} + y\}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\{S_n\}$ puis $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$.
6. (a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   (b) En déduire que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\lfloor S_n \rfloor}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

Solution du sujet 4.2

1. $X+Y$ est à valeurs dans $[0,2[$ et une densité de $X+Y$ est h, définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f_X(x-t)\mathrm{d}t$$

   Or $f_X(x-t) = 1$ si $x-t \in [0,1]$, 0 sinon. D'où :

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2] \end{cases}$$

   $\lfloor X+Y \rfloor(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $P(\lfloor X+Y \rfloor = 0) = P(X+Y \in [0,1[) = P(X+Y<1) = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
   Donc $P(\lfloor X+Y \rfloor = 1) = \frac{1}{2}$ aussi, d'où $\lfloor X+Y \rfloor \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, et $E(\lfloor X+Y \rfloor) = \frac{1}{2}$.

2. On utilise le SCE $\Big(\lfloor X+Y \rfloor = 0, \lfloor X+Y \rfloor = 1\Big)$. Si $x \in [0;1[$,

$$\begin{aligned} P(\{X+Y\} \leqslant x) &= P\Big((\{X+Y\} \leqslant x) \cap (\lfloor X+Y \rfloor = 0)\Big) + P\Big((\{X+Y\} \leqslant x) \cap (\lfloor X+Y \rfloor = 1)\Big) \\ &= P(0 \leqslant X+Y \leqslant x) + P(1 \leqslant X+Y \leqslant 1+x) = \int_0^x t\mathrm{d}t + \int_1^{1+x} (2-t)\mathrm{d}t = x. \end{aligned}$$

   Si $x<0$, $P(\{X+Y\} \leqslant x) = 0$, et si $x \geqslant 1, P(\{X+Y\} \leqslant x) = 1$. D'où $\{X+Y\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$.

3. (a)

```python
import numpy.random as rd, numpy as np
def simulPE2S_n(n):
        S=0
        for k in range(n):
                S+=rd.random()
        return np.floor(S)
        #ou S=sum(rd.random(n))

```

   (b) On conjecture que $E(\lfloor S_n \rfloor)$ est égal à $\frac{n-1}{2}$.

4. (a) On a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $n + \lfloor x \rfloor \leqslant n + x < (n + \lfloor x \rfloor) + 1$.
   (b) $\{x+y\} = \{\lfloor x \rfloor + \{x\} + y\} = \lfloor x \rfloor + \{x\} + y - \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \{x\} + y - \lfloor x \rfloor - \lfloor \{x\} + y \rfloor = \{\{x\} + y\}$

5. On montre par récurrence sur n que $\{S_n\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$. Pour $n=2$, c'est la question 2.
   Pour l'hérédité : $\{S_{n+1}\} = \{S_n + X_{n+1}\} = \{\{S_n\} + X_{n+1}\}$, avec $\{S_n\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$ et $X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$, les deux variables étant indépendantes. On applique la question 2.
   De plus, $S_n = \lfloor S_n \rfloor + \{S_n\}$, d'où par linéarité : $E(\lfloor S_n \rfloor) = E(S_n) - E(\{S_n\}) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$.

6. (a) $\forall \varepsilon > 0, P(\frac{\{S_n\}}{n} \geqslant \varepsilon) = P(\{S_n\}) \geqslant n\varepsilon) = 0$ si $n\varepsilon > 1$, donc pour n assez grand. D'où le résultat.
   (b) La suite $\left(-\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0,
   et la loi faible des grands nombres montre que $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$,
   d'où puisque $\frac{\lfloor S_n \rfloor}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{\{S_n\}}{n}$, $\frac{\lfloor S_n \rfloor}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

Sujet 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne respectivement par $\operatorname{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ le noyau et l'image de M.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$ où I est la matrice identité d'ordre n.

1. On considère une matrice involutive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(I - A)$ et $\operatorname{Ker}(I + A)$ sont supplémentaires. En déduire que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \in [\![-n, n]\!]$. Étudier la parité de $\operatorname{Tr}(A)$ en fonction de celle de n.
   (c) Que peut-on dire de plus sur les sous espaces $\operatorname{Ker}(I-A)$ et $\operatorname{Ker}(I+A)$ lorsque A est aussi symétrique ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire canonique)*.
2. Dans cette question, on considère deux matrices involutives A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Développer et simplifier les produits $(A + B)(A - B)$ et $(A - B)(A + B)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Im}(AB - BA) \subset \operatorname{Im}(A + B) \cap \operatorname{Im}(A - B)$.
   (c) Prouver que $\operatorname{Im}(AB - BA) = \operatorname{Im}(A + B) \cap \operatorname{Im}(A - B)$.
3. On se place dans le cas où $n = 2$ et on considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = 4\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Existe-t-il $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit solution de l'équation $MZ - ZM = N_1$?
   (b) On cherche maintenant à savoir s'il existe une matrice involutive A qui vérifie $MA - AM = N_2$. Montrer que l'on a nécessairement $\operatorname{Tr}(A) = 0$. En utilisant la question 2.(c) déterminer l'ensemble des possibilités pour une telle matrice involutive A.
   (c) Si A et Z sont deux solutions de l'équation $MU - UM = N_2$ d'inconnue $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que peut on dire de la matrice $Z - A$? En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $MU - UM = N_2$.

Solution du sujet 4.3

1. (a) Avec le cours ou par vérification immédiate, on voit déjà que $\mathrm{Ker}(I-A)\cap\mathrm{Ker}(I+A)=\{0\}$. De plus, si $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on peut écrire $X=\dfrac{1}{2}((I+A)X+(I-A)X)=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$ avec $(I-A)X_1=(I+A)X_2=(I-A^2)X=0$, et par suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(I-A)+\mathrm{Ker}(I+A)$. Finalement, on a bien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(I-A)\oplus\mathrm{Ker}(I+A)$ et le cours nous dit alors que A est diagonalisable.

   (b) Comme $A=R^{-1}DR$ avec R inversible et D diagonale, il vient $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(R^{-1}DR)=\mathrm{Tr}(DRR^{-1})=\mathrm{Tr}(D)=\dim(\mathrm{Ker}(I-A))-\dim(\mathrm{Ker}(I+A))=2\dim(\mathrm{Ker}(I-A))-n$. Si n est pair, on voit que l'ensemble des valeurs possibles pour $\mathrm{Tr}(A)$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs de $[\![-n,n]\!]$. Lorsque n est impair, cet ensemble est celui des entiers relatifs impairs de $[\![-n,n]\!]$.

   (c) Dans ce cas les sous espaces $\mathrm{Ker}(I-A)$ et $\mathrm{Ker}(I+A)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

2. (a) Comme $A^2=B^2(=I)$, on trouve $(A+B)\,(A-B)=BA-AB$ et $(A-B)\,(A+B)=AB-BA$.

   (b) Si $Y=(AB-BA)X$, on exploite la question précédente on observe que

   $$Y=(A-B)\,(A+B)\,X=-\,(A+B)\,(A-B)\,X\in\mathrm{Im}(A+B)\cap\mathrm{Im}(A-B),$$

   ce qui implique bien l'inclusion voulue.

   (c) On écrit $Y=(A+B)X_1=(A-B)X_2$, avec 2 (a) il vient $(A-B)Y=(AB-BA)X_1$ et $(A+B)Y=-(AB-BA)X_2$, d'où $2AY=(AB-BA)(X_1-X_2)$.
   Comme $A^2=I$, on obtient

   $$2Y=A(AB-BA)(X_1-X_2)=(B-ABA)(X_1-X_2)=(BA-AB)A(X_1-X_2)\in\mathrm{Im}(AB-BA).$$

   L'inclusion réciproque est donc prouvée et par suite $\mathrm{Im}(AB-BA)=\mathrm{Im}(A+B)\cap\mathrm{Im}(A-B)$.

3. (a) Supposons qu'il existe $Z\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant cette équation, en appliquant la trace à cette égalité on obtient $0=\mathrm{Tr}(MZ)-\mathrm{Tr}(ZM)=\mathrm{Tr}(N_1)=1$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution.

   (b) D'après la question 1. (b), $\mathrm{Tr}(A)\in\{-2,0,2\}$.
   Supposons que $\mathrm{Tr}(A)=-2$ (resp. $\mathrm{Tr}(A)=2$), comme A est diagonalisable (cf. 1. (a)) et que $Sp(A)\subset\{-1,1\}$, la seule possibilité est $A=-I$ (resp. $A=I$) ce qui est impossible d'après l'équation. On a donc nécessairement $\mathrm{Tr}(A)=0$. Avec la question 2. (c), on voit que l'on doit avoir $\mathrm{Im}(A+M)\cap\mathrm{Im}(A-M)=\mathrm{Im}(MA-AM)=\mathrm{Im}(N_2)=\mathrm{Vect}(1,-1)$, ce qui implique que l'une des deux matrices $A+M$ ou $A-M$ est non inversible et non nulle.
   Par suite, on a nécessairement $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$ ou $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$.
   Si $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$ (resp.$\mathrm{Im}(A-M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$), la somme des coefficients de chaque colonne de $A+M$ (resp. $A-M$) est nulle et comme $\mathrm{Tr}(A)=0$ il en résulte que l'on peut écrire A avec un seul paramètre que l'on détermine facilement en calculant par exemple le coefficient $(MA-AM)_{1,1}$.
   La vérification que les deux matrices trouvées sont bien involutives est triviale.
   L'ens. des A involutives vérifiant $MA-AM=N_2$ est donc $\left\{\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}\right\}$.

   (c) Si A et Z sont deux solutions se l'équation $MU-UM=N_2$, on observe que $M(Z-A)-(Z-A)M=0$ et par suite que $Z-A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec M que l'on détermine facilement. En prenant pour A l'une des deux matrices trouvées précédemment, il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $MU-UM=N_2$ est donné par $\mathcal{S}=A+\mathcal{C}$.
   Finalement, on trouve

   $$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}2+s&1+t\\-3+t&-2+s\end{pmatrix}\mid(s,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Sujet 4.4

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si A est un événement de cet espace, on note 1_A la variable indicatrice de l'événement A.
- X est une variable à valeurs positives admettant **une espérance non nulle**. On note F sa fonction de répartition.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes à valeurs positives suivant toutes la même loi que X.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ et F_n la fonction de répartition de S_n.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $t > 0$, on note $N_t(\omega)$ le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $S_n(\omega) > t$.
  On admet que N_t est une variable aléatoire.
- Pour tout $t > 0$, on note $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$ lorsque cette espérance existe.

1. Soit $t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. On suppose dans cette question seulement que X suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Écrire une fonction Python `N(t)` qui réalise une simulation de la variable N_t (la fonction `exponential(1)` de la bibliothèque `random` de `numpy` simule la loi $\mathcal{E}(1)$).
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}dx - \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}dx$.
   (c) En déduire la loi de N_t, l'existence de $M(t)$ et sa valeur.

On revient au cas général.

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > a) > 0$. On note alors $p = \mathbb{P}(X > a)$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{e}^{-X} \leqslant \exp\left(-a1_{[X>a]}\right)$. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant 1 - p(1 - \mathrm{e}^{-a})$.
   (b) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ F_n(t) \leqslant \mathrm{e}^t \left[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X})\right]^{n+1}$$
5. Montrer que $M(t)$ est défini pour tout $t > 0$ et que : $M(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$.

Solution du sujet 4.4

1. $(N_t = n)$ est réalisé si et seulement si $(S_n > t)$ est réalisé et $(S_{n-1} \leqslant t)$ aussi, c'est à dire $(S_n > t) \cap \overline{(S_{n-1} > t)} = (S_n > t) \setminus (S_{n-1} > t)$. D'où $P(N_t = n) = P(S_n > t) - P(S_{n-1} > t)$ car $(S_{n-1} > t) \subset (S_n > t)$. Ainsi, $P(N_t = n) = (1 - F_n(t)) - (1 - F_{n-1}(t)) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. (a)

```python
import numpy.random as rd
def N(t):
        s=0
        n=0
        while s<=t:
                s=s+rd.exponential(1)
                n+=1
        return n

```

   (b) On a $S_{n-1} \rightsquigarrow \gamma(n)$, d'où, pour $t > 0$, $F_{n-1}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathrm{d}x$.

   De même $F_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x$, d'où le résultat par la question 1.

   (c) On intègre par parties $F_{n-1}(t)$, et on obtient : $P(N_t = n) = \dfrac{t^n}{n!} e^{-t}$, d'où $N_t \rightsquigarrow \mathcal{P}(t)$.
   Ainsi $E(N_t) = t$.
3. Comme X est positive, on a $P(X \leqslant 0) = P(X = 0)$; donc $P(X \leqslant 0) < 1$, puisque sinon on aurait $E(X) = 0$, ce qui est absurde.
   De plus, $[X \leqslant 0] = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[X \leqslant \frac{1}{n}\right]$, d'où, par décroissance, $P([X \leqslant 0]) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(\left[X \leqslant \frac{1}{n}\right])$.
   Ainsi : $\exists k \in \mathbb{N}^*, P(\left[X \leqslant \frac{1}{k}\right]) < 1$, d'où $P(X > \frac{1}{k}) > 0$.
4. (a) La variable X est positive, d'où $X \geqslant a\mathbf{1}_{[X>a]}$ par disjonction des cas $[X > a]$ et $[X \leqslant a]$.
   D'où $-X \leqslant -a\mathbf{1}_{[X>a]}$ et on compose par l'exponentielle. D'où l'existence de l'espérance, et :

$$E(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant E(\exp(-a\mathbf{1}_{[X>a]})) = P(X > a)e^{-a} + P(X \leqslant a) = pe^{-a} + 1 - p = 1 - p(1 - e^{-a}).$$

   (b) L'espérance $E(e^{-S_n})$ existe et vaut $\Big(E(e^{-X})\Big)^{n+1}$ car $e^{-S_n} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{-X_k}$.

   D'où d'après Markov :

$$F_n(t) = P(S_n \leqslant t) = P(e^{-S_n} \geqslant e^{-t}) \leqslant \frac{E(e^{-X})^{n+1}}{e^{-t}}.$$

5. D'après la question 1 cela revient à étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n(F_{n-1}(t) - F_n(t))$.

   On sépare la somme partielle en deux et on réindexe :

$$\sum_{n=1}^{N} n(F_{n-1}(t) - F_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} nF_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) - NF_N(t).$$

   L'inégalité de la question 4b montre que $NF_N(t)$ tend vers 0, et que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} F_k(t)$ converge par comparaison à une série géométrique, d'où la conclusion.

Sujet 4.5

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   En utilisant le changement de variable $u = t^2/2$, que l'on justifiera, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K, et calculer sa valeur.

2. (a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série de terme général $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge.

   Pour $x \in D$, on note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in D$,

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

   (c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad U_n = S_n - 2\sqrt{n}\,.$$

   (a) Prouver que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (on pourra étudier $U_{n+1} - U_n$).

   (b) Justifier que pour tout $x \in D$ la série de terme général $S_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge.
   On note alors $h(x)$ sa somme.

On admet que si $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_k a_{n,k}$ converge (on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$),
- la série $\displaystyle\sum_n A_n$ converge

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$ existe et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$.

   (c) Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in D$.

   (d) En déduire un équivalent de $h(x)$ quand $x \to 0^+$.

4. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$ et en trouver un équivalent quand $x \to 0^+$.

Solution du sujet 4.5

1. Par changement de variable $t \mapsto t^2/2 = u$ et densité de la loi normale,
$$K = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$
NB : le théorème de changement de variable donne la convergence de l'intégrale.

2. (a) Si $x < 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge ; si $x = 0$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ; si $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge (absolument) ; et $D = \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Par décroissance de $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$ (pour tout $x > 0$) comme produit de fonctions décroissantes positives (ou étude de fonction), et convergence de la série, donc des intégrales, on obtient
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$
   (c) Le changement de variables $u \mapsto u\,x = t$ (pour $x > 0$) donne
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
   d'où par encadrement $\sqrt{x}\,f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} K = \sqrt{\pi}$, soit $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.

3. (a) On a par quantités conjuguées
$$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4\,n^{3/2}}$$
   de signe constant et terme général de série convergente ; donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers L).
   (b) Ainsi, $S_n - 2\sqrt{n} \to L = \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)$, donne $S_n \sim 2\sqrt{n}$ puis $S_n\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et la série converge.
   (c) Pour $x > 0$, par la permutation admise, après en avoir vérifié les conditions,
$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right] = \frac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$
   (d) D'après 2.c) et 3.c), $h(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

4. Pour $x > 0$, on a $\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$, donc la série converge.

   On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.
   La suite convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par M), donc
$$\left|h(x) - 2\,g(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} U_n\,\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \frac{M\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{M}{x} = \mathrm{o}\left(h(x)\right) \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{h(x)}{2} \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}$$

Sujet 4.6

1. Soit P un polynôme de degré $k > 0$ et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) = kP(x)$.
   (a) Montrer que 0 est une racine de P.
   (b) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leqslant k$ et Q un polynôme ne s'annulant pas en 0 tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^r Q(x)$.
   (c) En conclure que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^k$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée d'ordre n non nulle.

2. (a) On note $\mathcal{Z}(A)$ l'ensemble des polynômes non nuls annulateurs de A. Justifier l'existence de $\min\limits_{P \in \mathcal{Z}(A)} \deg(P)$. On note r ce minimum.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur de A de degré r et de coefficient dominant 1. **On note Π_A ce polynôme et on l'appelle le polynôme minimal de A.**

3. On suppose dans cette question qu'il existe une matrice carrée B d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $AB - BA = A$.
   (a) Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.
   (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kA^k = A^k B - BA^k$.
   (c) En déduire que $A\Pi_A'(A) = 0$.
   (d) En conclure que $A^r = 0$.

4. On suppose maintenant qu'il existe B et C carrées d'ordre n telles que $AB - BA = A + C$ et $BC = CB$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + C)^m = 0$.

Solution du sujet 4.6

1. (a) On évalue la relation donnée en $x = 0$, ce qui donne $0P'(0) = kP(0)$ avec k non nul, d'où $P(0) = 0$.
   (b) Soit r l'ordre de multiplicité de 0 pour le polynôme P. Alors $r \in [\![1, k]\!]$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = x^r Q(x)$, avec $Q(0) \neq 0$.
   (c) On a en dérivant : $xP'(x) = x(rx^{r-1}Q(x) + x^r Q'(x)) = rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x)$.
   D'où, d'après l'hypothèse, $rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x) = kx^r Q(x)$.
   On simplifie par x^r. En 0, cela donne $rQ(0) = kQ(0)$, d'où $k = r$ et puisque P est unitaire : $P(x) = x^k$.
2. (a) $\{deg(P), P \in \mathcal{Z}(A)\}$ est non vide et inclus dans $\mathbb{N}^*$, donc cet ensemble admet un minimum.
   (b) Unicité : par l'absurde, si P et Q sont deux polynômes disctints de degré r et unitaires, alors $P - Q$ est non nul de degré inférieur ou égal à $r - 1$ et annulateur de A, ce qui contredit la minimalité de r.
   Existence : si P est un polynôme non nul de degré r annulateur de A et de coefficient dominant α, alors $\frac{1}{\alpha}P$ convient.
3. (a) Si A est inversible, alors $ABA^{-1} - B = I_n$, d'où $tr(ABA^{-1} - B) = n$, c'est à dire $tr(ABA^{-1}) - tr(B) = 0 = n$, ce qui est absurde.
   (b) Par récurrence sur k. Initialisation pour $k = 0$ triviale. Hérédité : on a
   $$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^kB - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1} = AkA^k + (AB - BA)A^k = kA^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$
   (c) Posons $\Pi_A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \alpha_k x^k$. Alors $\Pi'_A(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^{k-1}$, d'où $x\Pi'_A(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^k$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} A\Pi'_A(A) &= \sum_{k=1}^{r} k\alpha_k A^k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A^kB - BA^k) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right)B - B\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right) \\ &= \Pi_A(A)B - B\Pi_A(A) = 0. \end{aligned}$$
   (d) Par unicité de π_A, on a : $\Pi_A(x) = \frac{1}{r}x\Pi'_A(x)$, soit $r\Pi_A(x) = x\Pi'_A(x)$,
   d'où $\Pi_A(x) = x^r$, en utilisant la question 1.
4. Posons $A' = A + C$, alors $A'B - BA' = (A+C)B - B(A+C) = AB + CB - BA - BC = AB - BA = A'$.
   D'où si m est le degré du polynôme minimal, alors $A'^m = 0$, c'est à dire $(A+C)^m = 0$.

Sujet 4.7

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux non nuls de E.

1. Montrer que pour tout x de E, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$.
2. En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout x de E, on a $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
   En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit $f = p \circ q \circ p$.
   Montrer que l'endomorphisme f de E est symétrique et que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.
   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(G + H)^\perp = G^\perp \cap H^\perp$.
   (d) Soit $F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$. Déterminer $p \circ q(x)$.
   (e) Conclure.

Solution du sujet 4.7

1. Comme il s'agit d'une projection orthogonale, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux d'où en appliquant le théorème de Pythagore
$$||p(x)||^2 \leqslant ||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2 = ||x||^2.$$
2. Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $p(q(x)) = \lambda x$. Donc
$$||p \circ q(x)||^2 = ||p(q(x))||^2 \leqslant ||q(x)||^2 \leqslant ||x||^2.$$
D'où $|\lambda|\ ||x||^2 \leqslant ||x||^2$ et comme x est non nul, $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Pour tout x de E, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux.
Donc $\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0$ soit $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $\langle p(q(x)), q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda\langle x, q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda||q(x)||^2 = \lambda^2||x||^2$.
Si $\lambda \neq 0$ alors comme x est non nul, on a $||q(x)||^2 = \lambda||x||^2$ d'où $\lambda > 0$. On en conclut que $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit x et y deux vecteurs, on a puisque p et q sont des endomorphismes symétriques
$$\langle f(x), y\rangle = \langle p \circ q \circ p(x), y\rangle = \langle q \circ p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), q \circ p(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$
   Ainsi f est un endomorphisme symétrique sur E.
   De plus soit x de $\mathrm{Im}(p)$, $f(x) = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

   (b) On applique le théorème spectral à l'endomorphisme f restreint à $\mathrm{Im}(p)$. Il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de f. Par ailleurs tout vecteur propre de f dans $\mathrm{Im}(p)$ est aussi un vecteur propre de $p \circ q$ puisque pour tout vecteur x de $\mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$. Il existe donc une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.

   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in G^\perp \cap H^\perp$ et soit $y \in G + H$. Ainsi
$$\exists u \in G, \exists v \in H, y = u + v.$$
   Donc $< x, y >=< x, u > + < x, v >= 0$. D'où $x \in (G + H)^\perp$. Ce qui donne une première inclusion. Réciproquement, on a $G \subset G + H$ et $H \subset G + H$ donc $(G + H)^\perp \subset G^\perp$ et $(G + H)^\perp \subset H^\perp$ d'où la deuxième inclusion.

   (d) D'après la question précédente, on a
$$F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp = \mathrm{Ker}(q)^\perp \cap \mathrm{Im}(p)^\perp = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p).$$
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$, $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(q)$ et $v \in F = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$. On a
$$p \circ q(x) = p(q(u)) + p(q(v)) = 0 + p(q(v)) = p(v) = 0.$$

   (e) On a
$$F \oplus (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p)) = E.$$
   d'où
$$(F + \mathrm{Ker}(q)) + \mathrm{Im}(p) = E.$$
   Ce qui permet de conclure que $p \circ q$ est diagonalisable.

Sujet 4.8

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit un réel $q \geqslant 2$. Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre q.

1. On pose $X = q^N$. Montrer que X admet des moments $\mathbb{E}(X^m)$ à tout ordre $m \in \mathbb{N}$ et les calculer.

On pose $c_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-q^k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n!c_n$.

2. Montrer que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire une majoration de la suite $(|a_n|)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |c_{n+1}x^{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|c_n x^n|$.
   (b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$; on note $f(x)$ sa somme.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $f(qx) = (1-x)f(x)$.
5. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)} = 0$.
6. Montrer l'existence d'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(U = n) = \mathbb{P}(N = n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right).$$
7. On pose $Y = q^U$. Les variables X et Y ont-elles la même loi ?
8. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X^m) = \mathbb{E}(Y^m)$.

Solution du sujet 4.8

1. Par $\boxed{\text{théorème de transfert,}}$ on a :

$$E(X^m) = \mathbb{E}(q^{mN}) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathrm{e}^{-q}\frac{q^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(q^{m+1})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\times\mathrm{e}^{q^{m+1}} = \mathrm{e}^{q^{m+1}-q}.$$

2. Comme $q \geqslant 2$, on a $1-q^k<0$, donc :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n+1}{q^{n+1}-1} = \frac{n+1}{(q-1)(1+q+\cdots+q^n)} \leqslant \frac{n+1}{1\times(1+1+\cdots+1)} = 1.$$

Ainsi $(|a_n|)$ est décroissante, donc : $\boxed{\forall n\geqslant 0,\ |a_n|\leqslant |a_0| = 1.}$

3. (a) Si $x=0$ c'est évident, sinon, comme $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \dfrac{|x|}{q^{n+1}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

   par définition de la limite, il existe n_0 tel que $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n\geqslant n_0$.

   (b) Par récurrence évidente sur $n\geqslant n_0$, on en déduit que : $|c_nx^n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}|c_{n_0}x^{n_0}|$.
   Par comparaison avec une série géométrique convergente, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$.

4. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) = f(x)-xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n-c_{n-1})x^n \\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}\left(\frac{1}{1-q^n}-1\right)x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} c_nq^nx^n = f(qx).\end{aligned}$$

5. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_nq^{n(m+1)} = f(q^{m+1})$. Montrons par récurrence sur $m\geqslant 0$, la relation : $f(q^{m+1}) = 0$.
   - C'est vrai si $m=0$, en prenant $x=1$ dans la question précédente : $f(q) = (1-1)f(1) = 0$
   - Si c'est vrai à l'ordre m, alors en prenant $x=q^{m+1}$ dans la question précédente,
     on a : $f(q^{m+2}) = (1-q^{m+1})f(q^{m+1}) = 0$, donc c'est vrai à l'ordre $m+1$.

6. La suite $\left(\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive car $|a_n|\leqslant 1$. Et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)a_n \\ &= 1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^n = 1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}c_nq^n = 1,\end{aligned}$$

   d'après la question 5, avec $m=0$.

7. Les variables N et U n'ont pas la même loi puisque $\frac{a_n}{2}\neq 0$, donc $X=q^N$ et $Y=q^U$ n'ont pas la même loi non plus, puisque la fonction $t\mapsto q^t$ est injective sur $\mathbb{R}_+$.

8. Par théorème de transfert, par un calcul analogue à celui de Q6, on a :

$$\begin{aligned}E(Y^m) = \mathbb{E}(q^{mU}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}\mathbb{P}(N=n)\left(1+\frac{a_n}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}\mathbb{P}(N=n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}P(N=n)a_n \\ &= \mathbb{E}(X^m) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^{n(m+1)} = \mathbb{E}(X^m)+0,\ \text{d'après Q5.}\end{aligned}$$

Sujet 4.9

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0,1]$.
   (a) Montrer que, $\forall t>0$, $(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t)+(1-\lambda)g(t)$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant 1$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et $\lambda\in[0,1]$.
   En utilisant la question précédente, montrer que :
$$\int_0^{+\infty}(f(t))^\lambda(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)^\lambda\left(\int_0^{+\infty} g(t)dt\right)^{1-\lambda}$$
3. (a) On rappelle que : $\forall\, x>0,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$. Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$.
   On définit alors la fonction G sur $]0,+\infty[$ par $G : x\mapsto \ln(\Gamma(x))$.
   (b) Établir que pour tout $\lambda\in[0,1]$ et $\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2$ on a :
$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant(\Gamma(x))^\lambda(\Gamma(y))^{1-\lambda}$$
   Que peut-on en déduire pour la fonction G ?
4. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y\geqslant 1$.
   (a) Montrer que $G(x+1)\leqslant\left(1-\dfrac{1}{y}\right)G(x)+\dfrac{1}{y}G(x+y)$.
   (b) En déduire que $\Gamma(x+y)\geqslant x^y\Gamma(x)$.
5. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y\leqslant 1$. Montrer que :
$$\Gamma(x+y)\leqslant x^y\Gamma(x)$$

Solution du sujet 4.9

1. (a) Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in \,]0;+\infty[$, $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$ par concavité du ln. En posant $x = f(t)$ et $y = g(t)$, les fonctions étant à valeurs strictement positives sur $]0;+\infty[$, et en passant à l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

   (b) D'après l'inégalité précédente, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt$ étant convergente par linéarité, on a par comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt = 1$ d'après les hypothèses.

2. Posons, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}$ (le dénominateur étant non nul car l'intégrale est strictement positive) et $\psi(t) = \dfrac{g(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t}$. φ et ψ vérifient les hypothèse de la question précédente.

   D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\varphi(t))^{\lambda}(\psi(t))^{1-\lambda}dt$ converge et est inférieure ou égale à 1, d'où la conclusion par linéarité.

3. (a) $\forall x > 0, \Gamma(x) > 0$ par stricte positivité (à justifier avec le programme).

   (b) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t})^{\lambda}(t^{y-1}e^{-t})^{1-\lambda}\mathrm{d}t$, ce qui est inférieur d'après la question 2 à $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}$. On en déduit que G est convexe.

4. (a) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+1) = (1-\frac{1}{y})x + \frac{1}{y}(x+y)$, d'où le résultat par convexité.

   (b) $\forall x \in]0,+\infty[, G(x+1) = G(x) + \ln(x)$, d'où, par la question précédente, $\frac{1}{y}G(x+y) \geqslant \ln(x) + \frac{1}{y}G(x)$, c'est à dire $G(x+y) \geqslant y\ln(x) + G(x)$. En prenant l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

5. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+y) = \lambda x + (1-\lambda)(x+1)$ $(x+y \in [x,x+1])$ avec $\lambda = 1-y \in [0,1]$.
   D'où : $G(x+y) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x+1) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x) + y\ln(x) \leqslant G(x) + y\ln(x)$, d'où le résultat.

Sujet 4.10

Soit $p \in]0,1]$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler la formule donnant $\mathbb{P}(X_1 = k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geqslant n+1$, $\displaystyle\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si} \quad k \geqslant n, \\ \\ 0 & \text{si} \quad k < n \end{cases}$$

Dans la suite, **on admet** que si l'on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} x^j$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{j=n}^{+\infty} j(j-1)\cdots(j-n+1)x^{j-n} = f^{(n)}(x).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, bornée et à dérivée bornée.
Soit N un majorant de $|f'|$ et M un majorant de $|f|$.

4. Dans cette question on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.
   (b) En déduire que la série : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.

Pour tout $x \in]0,1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$K_{f,n}(x) = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k.$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'existence de $\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ et comparer cette espérance à $K_{f,n}(p)$.
6. Soit ε un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{K}{n}$ où K est une constante à déterminer.
   (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant N.\varepsilon + M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(K_{f,n}(p))$.

SOLUTION DU SUJET 4.10

1. Pour $k=0$, on $\mathbb{P}(X_1=k)=0$ et pour tout $k\geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X_1=k)=p(1-p)^{k-1}$.
2. Pour n fixé, par récurrence sur k à l'aide la formule du triangle de PASCAL.
3. Par récurrence sur $n\geqslant 1$. Initialisation immédiate. Supposons l'égalité vraie au rang n :
Pour $k<n+1$, on a $\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=0$, car $X_k(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Si $k\geqslant n+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\mathbb{P}(S_n+X_{n+1}=k)&=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(\{S_n=i\}\cap\{X_{n+1}=k-i\})\\
&=\sum_{i=n}^{k-1}\mathbb{P}(S_n=i)\times\mathbb{P}(X_{n+1}=k-i),\ \text{(indépendance et support des variables)}\\
&=\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}p^n(1-p)^{i-n}\times p(1-p)^{k-i-1},\ \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{i=n}^{k-1}\binom{i-1}{n-1}=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\binom{k-1}{n},\ \text{(d'après 2)}
\end{aligned}$$

4. (a) Comme $1-x\in]-1,1[$, après décalage d'indice, la formule admise donne la convergence de la série — et sa somme $(n-1)!f^{(n)}(1-x)$.

   (b) La valeur absolue du terme général de la série est majorée par $\sup|f|\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$.
   Donc la série est absolument convergente.

5. Comme f est bornée sur $[1,+\infty[$, l'espérance de $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ existe. Par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)&=\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{k=n}^{+\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(\frac{n+k}{n}\right)\mathbb{P}(S_n=n+k)b\\
&\overset{Q.3}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{n-1}p^n(1-p)^k=K_{f,n}(p)
\end{aligned}$$

6. (a) Les variables $(X_k)_{k\geqslant n}$ ont une espérance (qui est $\frac{1}{p}$) et une variance (qui est $\frac{q}{p^2}$).
   L'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV permet donc de conclure que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{q}{np^2\varepsilon^2}$.

   (b) Par inégalité des accroissements (avec $|f'|\leqslant N$) : $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leqslant N\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|$ $(\star)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|&\leqslant\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon}\right)\\
&\leqslant\mathbb{E}\left(N\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\ \text{(l'inégalité triangulaire et }(\star))\\
&\leqslant\mathbb{E}\left(N\varepsilon\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leqslant\varepsilon}\right)+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)\leqslant N\varepsilon+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

   (c) Au final, pour tout $n\geqslant 1$ on a : $|K_{n,f}(p)-f\left(\frac{1}{p}\right)|\leqslant N\varepsilon+\frac{2M}{np^2\varepsilon^2}$.
   Pour n assez grand le deuxième terme est majoré par ε. Donc le premier membres est aussi petit que l'on veut pour n assez grand. Ainsi $(K_{f,n}(p))_n$ converge vers $f\left(\frac{1}{p}\right)$.

Sujet 4.11

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$ est convergente.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$$

2. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
3. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = \frac{2}{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$
   (b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie u_n à l'appel de `u(n)` .

```python
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=---
    else:
        u=---
        for k in range(---):
                u=---
    return u
```

   où la boucle `for k in range(2,n+1,2):` fait prendre à `k` des valeurs de `2` (inclus) à `n+1` (exclu) avec un pas de `2` , soit : `2,4,6,8,...`

   (c) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, on a $u_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}$, et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on a $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

4. (a) Pour tout réel x et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k}$.

   (b) Établir la relation :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.

   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Solution du sujet 4.11

1. La fonction intégrée est continue sur $]0, \pi/2]$.
   En 0, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}\right| \underset{x\to 0}{\sim} n$; donc l'intégrale proposée est faussement impropre en 0.

2. On trouve $u_0 = 0, u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\mathrm{d}x = 2$.

3. (a) On sait que $\sin((n+2)x) = \sin((n+1)x)\cos(x) + \sin(x)\cos((n+1)x)$
   et $\sin(nx) = \sin((n+1)x)\cos(x) - \sin(x)\cos((n+1)x)$.
   Donc $\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2\cos((n+1)x)\sin(x)$. Donc, par linéarité de l'intégration

$$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2\cos((n+1)x)\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

   (b) On peut proposer (attention au décalage) :

```
import numpy as np
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    else:
        u=np.pi/2
        for k in range(3,n+1,2):
                u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    return u
```

   (c) D'après 3.a), on a, $u_{2p+3} - u_{2p+1} = \frac{1}{p+1}\sin((p+1)\pi) = 0$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p+1} = u_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$u_{2p+2} = u_{2p} + \frac{2}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = u_{2p} + \frac{2\times(-1)^p}{2p+1} \Rightarrow u_{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4. (a) Pour tout réel x, on a $-x^2 \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k} = \frac{1-\left(-x^2\right)^p}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^{p+1}x^{2p}}{1+x^2}$.

   (b) En intégrant cette relation sur $[0,1]$ (fonctions continues), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Par décroissance sur $[0,1]$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a : $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.
   En multipliant par $x^{2p} \geqslant 0$ et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2p+1}$,
   et par encadrement $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
   En peut passer à la limite dans 4. b), on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   (d) Pour finir, $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}$,
   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Sujet 4.12

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{L}\big(E, \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
On note également $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel de E des matrices symétriques, respectivement antisymétriques.

1. Montrer que $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par : $A \mapsto {}^tA$.
   Calculer $\varphi \circ \varphi$ et en déduire les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. On définit $G : E \to F$ comme l'application qui, à toute matrice $M \in E$, associe l'application $G(M)$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $G(M) : A \mapsto \mathrm{Tr}(MA)$.
   Justifier que G est un isomorphisme de E sur F.

On considère dans la suite un élément non nul u de F, et on note ψ l'application de E dans E définie par : $\psi : A \mapsto u(A)\, I_n$.

4. (a) Justifier qu'il existe une unique matrice $M \in E$ telle que $\forall\, A \in E\,,\ \psi(A) = \mathrm{Tr}(MA)\, I_n$.
   (b) Déterminer le rang de ψ.
   (c) Calculer $\psi \circ \psi$ en fonction de M.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0$.
   (e) En déduire que ψ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
6. Dans cette question, on suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
   On rappelle que cela implique $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (a) Que vaut $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi)$? En déduire la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$, puis que
   $$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big]\,.$$
   (b) Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme $f = \varphi + \psi$ est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Solution du sujet 4.12

1. Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de F sur $\mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R})$.
   Donc $\dim F = \dim \mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R}) = n^2 = \dim E$.
2. On a $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$;
   puis $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de somme (directe) E (à justifier), donc φ diagonalisable.
3. L'application G est linéaire ; $\forall i, j$, $[G(M)](E_{i,j}) = m_{j,i}$, donc $G(M) = 0 \implies M = 0$ d'où $\mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, et par égalité des dimensions démontrée en question 1, G est un isomorphisme.
4. (a) D'après 2. $M = G^{-1}(u)$.
   (b) $u \neq 0$ entraîne $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(I_n)$ donc $\mathrm{rg}(\psi) = 1$.
   (c) L'application ψ est linéaire et $\psi^2(A) = u(A)\,\psi(I_n) = u(A)\,\mathrm{Tr}(M) I_n$ donc $\psi^2 = (\mathrm{Tr} M)\,\psi$.
   (d) On a $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \iff I_n \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff 0 = \psi(I_n) = \mathrm{Tr}(M)\, I_n \iff \mathrm{Tr} M = 0$.
   (e)
      - Si $\mathrm{Tr} M \neq 0$, alors I_n est vecteur propre de ψ associé à $\mathrm{Tr} M \neq 0$; comme $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-espace propre de dimension $n^2 - 1$ d'après 3.b), on a ψ diagonalisable.
      - Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors $\psi^2 = 0$, donc 0 est seule valeur propre de $\psi \neq 0$ (car $u \neq 0$), donc ψ non diagonalisable.
5. Par bijectivité de G,

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi \iff \forall A,\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}({}^t AM) = \mathrm{Tr}({}^t MA) = \mathrm{Tr}(A\,{}^t M) \iff M = {}^t M \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

6. (a) Comme $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de E, mais $I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi) = E$.
   Par la formule de Grassmann, on a alors

$$\dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] = \dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big] + \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\big] - \dim(E) = \frac{n\,(n+1)}{2} - 1$$

   Comme $\mathrm{Vect}(I_n)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$ sont d'intersection nulle, leur somme est directe et incluse dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, puis égale par les dimensions.
   (b) On a

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \implies \varphi \circ \psi(A) = \psi \circ \varphi(A) = -\psi(A) \implies \psi(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Im}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$$

   donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Alors

$$E = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

   qui sont des sous-espaces propres de f associés respectivement à $1 + \mathrm{Tr}(M)$, 1 et -1 ; d'où f est diagonalisable.

CHAPITRE

5 EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

Question sans préparation 2

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives telle que $xf'(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(f(x)\right)$.

1. Montrer, en étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^\alpha}$, que pour tout $\alpha > 0$, $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dt$ converge.

Question sans préparation 3

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère n^2 variables aléatoires indépendantes $(X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ d'ordre n par $M(\omega) = \left[X_{i,j}(\omega)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = Tr(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_{k,k}$ et $Z = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_{i,j} X_{j,i}$.

   Déterminer les lois suivies par Y et Z.
2. On introduit la variable aléatoire U qui correspond à la trace de M^2, c'est à dire $U(\omega) = Tr(M(\omega)^2)$ pour $\omega \in \Omega$. Calculer l'espérance et la variance de Y et de U.

Question sans préparation 4

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes positives, admettant chacune un espérance. Prouver que si la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \mathbb{P}\big(Y_n = 2^{-n}\big) = \frac{1}{2^{-n}+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(Y_n = 2^n\big) = \frac{1}{2^n+1}\,.$$
Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la suite $\big(\mathbb{E}(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Conclure.

Question sans préparation 5

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. On suppose que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E qui vérifie les conditions suivantes :

$$(*) \qquad F \cap G = \{0\}\,,\, F \cap G^\perp = \{0\}\,,\, F^\perp \cap G = \{0\} \text{ et } F^\perp \cap G^\perp = \{0\}\,.$$

1. Pour $n = 2$, donner un exemple de deux sous espaces F et G qui vérifient les conditions $(*)$.
2. On revient au cas général où F et G vérifie $(*)$. Montrer que n est nécessairement pair et dans ce cas donner un exemple de deux tels sous espaces.

Question sans préparation 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est strictement décroissante et qui converge vers 0 en $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - xf(x).$$

1. Étudier la fonction F. Préciser le comportement de F en $+\infty$ lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Prouver que si la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Question sans préparation 7

Soit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements tels que : $A_0 = \Omega$, et $\forall n \geqslant 1,\ P(A_n|A_{n-1} \cap \cdots \cap A_0) = \frac{1}{n+1}$. Soit la variable aléatoire X définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} | \omega \notin A_n\}$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer son espérance et sa variance.

Question sans préparation 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n+1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$, soit A_k l'événement « le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n+1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, pour $k \in [\![1, 2n+1]\!]$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

Question sans préparation 9

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour chaque $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Y_n en posant $Y_n(\omega) = [X_1(\omega) \times \cdots \times X_n(\omega)]^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n. Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine.

Question sans préparation 10

Toutes la variables aléatoirs de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit un entier $k \geqslant 1$. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [\![1,k]\!]$.
On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ qui suivent une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.
On définit enfin une variable aléatoire Y par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum\limits_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que si, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, X_i a une espérance, alors Y a une espérance.
2. Donner une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.

Question sans préparation 11

1. Soit $t > 0$. Montrer que $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x}\,\mathrm{d}x$ existe,

   et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall t > 0 :\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x}\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

2. Montrer que $I(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$.

   On pourra utiliser l'identité $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{t+x} + \dfrac{1}{t+x}$ *pour* $t > 0$ *et* $x \geqslant 0$.

Question sans préparation 12

Soient X_1, X_2, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que X_1 (respectivement X_2) suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$, (resp. $\mathcal{P}(\lambda_2)$) et que Y est à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $P(Y=1) = p$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on définit la matrice :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \\ Y(\omega)X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que M admette des valeurs propres réelles.
2. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.