Lycée Clemenceau **2024-25**
ECG 2

Devoir Maison 1 de Mathématiques : suites, séries, intégrales impropres

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

(1) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et monotone.

(2) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

(3) Dans cette question, on se propose d'étudier le comportement asymptotique de (u_n). Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

(b) En déduire que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a : $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

(c) En déduire que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

(d) Montrer que la suite (v_n) est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.

(f) En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement de la question (3)(c), montrer que :

$$\exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.$$

(g) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$.

(h) On pose $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis qu'elle vérifie la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n).$$

(i) Prouver enfin qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

(1) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. On notera $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente (*on distinguera les cas "$x = 0$" et "$x \neq 0$"*). On note alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

(3) (a) Montrer que la fonction S est impaire.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire les variations de la fonction S sur $[1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, -1]$.

(4) (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{x}{(1+x)^2}f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x}f(\alpha)$$

(*indication : on pourra utiliser l'encadrement* $nx^2 \leq 1 + nx^2 \leq n(1+x)^2$).

(b) En déduire un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$.

(5) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

(a) Justifier que $S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$, puis montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

(b) En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}dt.$$

(1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale I_a converge, et donner sa valeur.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent.

(3) Etablir que, pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, et en déduire que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(4) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Montrer que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.

(5) Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

(6) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note α.

(7) Justifier que α appartient à $]0,1]$.

(8) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de (u_n).

(9) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

(10) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -g(x)$.

(11) Soit $T : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $T(x) = xf(x)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

(12) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Soit α un entier > 1 fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

(b) Etudier les variations de la suite (u_n), et en déduire qu'elle converge.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

(3) En considérant la suite $(\ln(u_n))$, montrer que (u_n) tend vers 0.

(4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}.$$

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right].$$

(c) A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

(d) En déduire la nature de la série de terme général u_n.